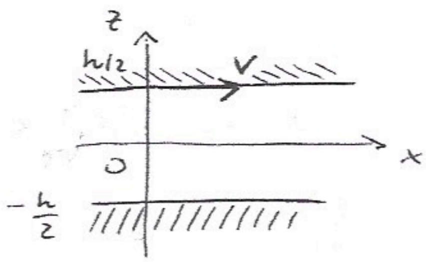
EX. 1 :



$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u = u(z) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dz}$$

$$p = p(x) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \quad ; \quad \frac{dp}{dx} = G$$

Q1)

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{G}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dz} = \frac{G}{\mu} z + A$$

$$u(z) = \frac{G}{2\mu} z^2 + Az + B$$

Q2)

$$\begin{cases} u\left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \\ u\left(\frac{h}{2}\right) = V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{G}{2\mu}\frac{h^2}{4} - \frac{Ah}{2} + B & (i) \\ V = \frac{G}{2\mu}\frac{h^2}{4} + \frac{Ah}{2} + B & (ii) \end{cases}$$

$$(i)+(ii) \Rightarrow V = \frac{G}{2\mu}\frac{h^2}{2} + 2B \Rightarrow B = \left(V - \frac{Gh^2}{4\mu}\right)\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$(ii)-(i) \Rightarrow V = Ah \quad \Rightarrow A = \frac{V}{h}$$

$$\Rightarrow u(z) = \frac{G}{2\mu} z^2 + \frac{V}{h} z + \frac{V}{2} - \frac{Gh^2}{8\mu} =$$

$$= \frac{G}{8\mu}\left(4z^2 - h^2\right) + \frac{V}{h} z + \frac{V}{2}$$

Q3)

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u(z)\,dz = \frac{G}{2\mu}\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \frac{Gh^2}{8\mu} z \Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{V}{h}\frac{z^2}{2}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{V}{2} h =$$

$$= \frac{Vh}{2} - \frac{Gh^3}{12\mu}$$

Q4) $$u(z) = \frac{G}{8\mu}\left(4z^2 - h^2\right) + \frac{V}{h} z + \frac{V}{2}$$

$G = 0 \Rightarrow$ $U(z) = \frac{V}{h} z + \frac{V}{2}$ PROFIL LINÉAIRE

$\left(\frac{dp}{dx} = 0\right)$ ECOUL. CISAILLEMENT SIMPLE

$V = 0 \Rightarrow u(z) = \frac{G}{8\mu}\left(4z^2 - h^2\right)$ PROFIL PARABOLIQUE

ECOUL. de POISEUILLE

Q5) $G < 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow p \searrow$ avec $x \nearrow \Rightarrow$ le gradient de pression est "moteur" et amplifie l'effet produit par la plaque en $z = \frac{h}{2}$.

$G > 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} > 0 \Rightarrow p \nearrow$ avec $x \nearrow \Rightarrow$ le gradient de pression est dit ADVERSE et s'oppose à l'action de la plaque.

Q6) $$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu\left(\frac{G}{\mu} z + \frac{V}{h}\right) = G z + \frac{V\mu}{h}$$

F. NEWTON

$$\tau\left(z = \frac{h}{2}\right) = \frac{Gh}{2} + \frac{V\mu}{h}$$

$$\tau(z^*) = 0 \Rightarrow z^* = -\frac{V\mu}{Gh} < 0$$

pas au centre du système ($z = 0$) comme pour l'écoulement de Poiseuille.

EX. 2 :

$\mu = 10^{-3}$ Pa·s

$\rho = 10^3$ kg m^{-3}

$L = 500$ m

$D = 10$ cm $= 0{,}1$ m

$q_v = 0{,}02$ m^3 s^{-1}

$\varepsilon = 10^{-4}$ m

2 COUDES à 45° : $K_{45} = 0{,}2$

" " " 90° : $K_{90} = 0{,}3$

1 COUDE à 180° : $K_{180} = 0{,}4$

Q1) $q_v = V \cdot S$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow V = \frac{4}{\pi}\frac{q_v}{D^2} = \frac{4}{\pi}\frac{0{,}02}{(0{,}1)^2} \simeq 2{,}55 \ \frac{m}{s}$$

Q2) $$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 2{,}55 \cdot 0{,}1}{10^{-3}} = 2{,}55 \cdot 10^5$$

$Re > Re_c \simeq 2000 \rightarrow$ régime TURBULENT

Q3) F. POISEUILLE : $\Lambda = \frac{64}{Re}$ $\rightarrow$ LAMINAIRE ; $Re < 2000$

F. BLASIUS : $\Lambda = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}$ $\rightarrow$ TURBULENT LISSE ; $2000 < Re < 10^5$

F. BLENCH : $\Lambda = 0{,}79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$ $\rightarrow$ TURBULENT RUGUEUX ; $Re > 10^5$

ici : $Re \simeq 2{,}55 \cdot 10^5 > 10^5 \Rightarrow$ F. BLENCH :

$$\Lambda = 0{,}79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \simeq 0{,}025$$

Q4) $\xi_{TOT} = \xi_{LIN} + \xi_{SING}$

$$\xi_{LIN} = \Lambda \frac{L}{D}\frac{\rho V^2}{2} \simeq 406406 \ J m^{-3} = 406406 \ Pa$$

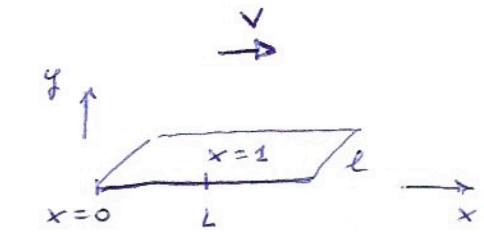
$$\xi_{SING} = 2K_{45}\frac{\rho V^2}{2} + 2K_{90}\frac{\rho V^2}{2} + K_{180}\frac{\rho V^2}{2} =$$

$$= \frac{\rho V^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(K_{45} + K_{90} + \frac{K_{180}}{2}\right) =$$

$$= \rho V^2 \left(K_{45} + K_{90} + \frac{K_{180}}{2}\right) \simeq 4552 \ J m^{-3} = 4552 \ Pa$$

$$\Rightarrow \xi_{TOT} = \xi_{LIN} + \xi_{SING} \simeq 406406 + 4552 = 410958 \ Pa$$

• EX.3 :



$L = 2\,m$

$l = 1\,m$

$V = 5\,m/s$

$\rho = 10^3\,kg\,m^{-3}$

$\mu = 10^{-3}\,Pa \cdot s$

$\vec{v} = (u, v)$

$Re_c = 5 \cdot 10^5$ (TRANSITION LAMINAIRE - - TURBULENT)

Q1) à la paroi : $u(y=0) = 0$ pour tous les x — CONDITION de NON GLISSEMENT (FROTTEMENT VISQUEUX)

Q2) $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{10^{-3}}{10^3} = 10^{6}\ m^2 s^{-1}$

Q3) $x = 1\,m$: $R_x = \frac{Vx}{\nu} = \frac{5 \cdot 1}{10^{-6}} = 5 \cdot 10^6 > \underbrace{5 \cdot 10^5}_{Re_c} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ régime TURBULENT

Q4) $\frac{\delta}{x} = \frac{0{,}37}{R_x^{1/5}}$ pour $\underset{R_x}{Re} > 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta(x = 1\,m) = \left.\frac{0{,}37}{R_x^{1/5}} \cdot x \right|_{x=1\,m} = \frac{0{,}37}{(5 \cdot 10^6)^{1/5}} \simeq 0{,}017\ m =$

$= 1{,}7\ cm$

Q5) écoulement turbulent sur toute la plaque

$C_F = \frac{0{,}074}{Re^{1/5}} \simeq 0{,}0029$

$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{5 \cdot 2}{10^{-6}} = 10^7$

$F = C_F \frac{\rho V^2}{2} S \simeq 0{,}0029 \cdot \frac{10^3 \cdot 5^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 72{,}5\ N$