

Examen de Mécanique des fluides appliquée

25 mars 2025

Durée : 2 h. Sans documents

Exercice 1 : Dynamique des fluides visqueux

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux confiné entre deux plaques parallèles, de longueur infinie et situées en $z = -h/2$ et $z = h/2$ (Fig. 1), sous l'effet d'un gradient de pression. On suppose que la plaque inférieure soit fixe et que la plaque supérieure soit maintenue en mouvement avec une vitesse $V > 0$, c'est-à-dire dirigée vers les $x > 0$, et que le gradient de pression soit constant $\frac{dp}{dx} = G = \text{const.}$

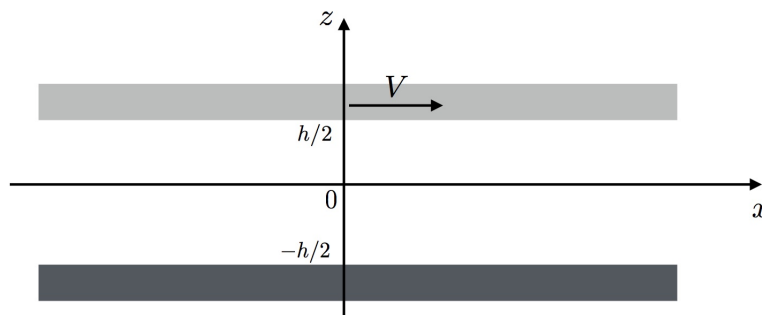


FIGURE 1 – Région délimitée par deux plaques, dont une mobile, siège d'un écoulement visqueux.

On se propose de calculer le profil de vitesse $u = u(z)$ de l'écoulement (dans le plan (x, z)) complètement développé laminaire. La vitesse $u(z)$ satisfait l'équation

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{dp}{dx}, \quad (1)$$

où μ est la viscosité dynamique et $p = p(x)$ est la pression.

Q1) Déterminer l'expression de $u = u(z)$ en intégrant (deux fois) l'Éq. (1).

Q2) Calculer les deux constantes d'intégration en imposant les conditions aux limites en $z = -h/2$ et $z = h/2$ et montrer que la solution peut s'écrire sous la forme $u(z) = \frac{G}{8\mu}(4z^2 - h^2) + \frac{V}{h}z + \frac{V}{2}$.

Q3) Calculer le débit volumétrique par unité de largeur des plaques.

- Q4) Quels types de profils remarquables on obtient pour (i) $G = 0$ et (ii) $V = 0$?
- Q5) Dans le cas $V \neq 0$, discuter le rôle du gradient de pression en fonction de son signe ($G < 0$, $G > 0$).
- Q6) En utilisant la formule de Newton, déterminer l'expression de la contrainte visqueuse τ .

Exercice 2 : Pertes de charge

Un fluide incompressible (eau) s'écoule dans un tuyau (à section circulaire) d'acier de diamètre $D = 0,1$ m et de longueur $L = 500$ m. Le débit volumétrique est $q_v = 0,02$ m³ s⁻¹, la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau sont, respectivement, $\mu = 10^{-3}$ Pa·s et $\rho = 10^3$ kg m⁻³.

La rugosité du tuyau vaut $\epsilon = 10^{-4}$ m. La canalisation comprend aussi :

- 2 coudes à 45°, ayant chacun un coefficient de perte de charge $K = 0,2$;
- 2 coudes à 90°, ayant chacun un coefficient de perte de charge $K = 0,3$;
- 1 coude à 180°, ayant un coefficient de perte de charge $K = 0,4$.

- Q1) Calculer la vitesse moyenne de débit V .
- Q2) Calculer le nombre de Reynolds (Re) et en déduire le régime d'écoulement (laminaire ou turbulent).
- Q3) Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire. Expliquer quel est le domaine d'application des différentes formules données dans le formulaire ci-dessous.
- Q4) Calculer la perte de charge totale dans la canalisation.

Formulaire : coefficient de perte de charge linéaire

- Formule de Poiseuille : $\Lambda = 64/Re$, pour $Re < 2000$
- Formule de Blasius : $\Lambda = 0.316Re^{-1/4}$, pour $2000 < Re < 10^5$
- Formule de Blench : $\Lambda = 0.79\sqrt{\epsilon/D}$, pour $Re > 10^5$

Exercice 3 : Couche limite

L'eau s'écoule sur une plaque plane et lisse de longueur $L = 2$ m et largeur $\ell = 1$ m, avec une vitesse libre de $V = 5$ m/s. On donne pour l'eau : $\rho = 10^3$ kg/m³ et $\mu = 10^{-3}$ Pa·s. Ici on prendra $Re_c = 5 \cdot 10^5$ pour la valeur critique du nombre de Reynolds pour la transition à la turbulence.

- Q1) Quelle est la valeur de la vitesse de l'écoulement à la paroi, et pourquoi ?
- Q2) Déterminer la viscosité cinématique.
- Q3) Calculer le nombre de Reynolds à la distance $x = 1$ m du bord d'attaque et en déduire le type de la couche limite.

Q4) Déterminer l'épaisseur de la couche limite à la distance $x = 1$ m.

Q5) En considérant que l'écoulement est turbulent sur toute la plaque, évaluer le coefficient de frottement moyen c_F . Calculer ensuite la force de traînée (ou de frottement) sur une face de la plaque.

Formulaire : plaque plane lisse

- Si la couche est laminaire, pour $Re < 5 \cdot 10^5$: $c_F = \frac{1,328}{\sqrt{Re}}$; $\frac{\delta}{x} \sqrt{R_x} = 5$.
- Si la couche est turbulente, pour $Re > 5 \cdot 10^5$: $c_F = \frac{0,074}{Re^{1/5}}$; $\frac{\delta}{x} = \frac{0,37}{R_x^{1/5}}$.

Dans ces expressions Re et R_x sont les nombres de Reynolds global et local, respectivement ; δ est l'épaisseur conventionnelle de la couche limite ; c_F est le coefficient de frottement moyen.