

TD4

EX.1 : CYCLE DE CARNOT

AIR $\rightarrow m = 1 \text{ kg}$

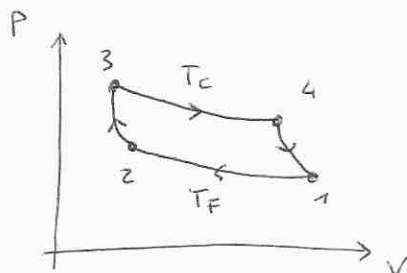
EVOLUTION REVERSIBLE

SOURCE CHAUDE : $T_C = 823 \text{ K}$

$\approx 550^\circ \text{C}$

" FROIDE : $T_F = 288 \text{ K}$

$\approx 15^\circ \text{C}$



CYCLE MOTEUR \Rightarrow il doit tourner dans ce sens.

ETAT INITIAL ET FINAL :

$$T_1 = T_F = 288 \text{ K}$$

$$P_1 = 10^5 \text{ Pa}$$

AIR \rightarrow GAZ PARFAIT

avec :

$$R = 287 \text{ J/(kg K)}$$

$$C_V = 713 \text{ J/(kg K)}$$

1 \rightarrow 2 : ISOTHERME ($T_1 = T_2 = T_F$)

2 \rightarrow 3 : ADIABATIQUE ($Q=0$) $\Rightarrow dS=0$: ISENTROPIQUE ; $P_3 = 6 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

3 \rightarrow 4 : ISOTHERME ($T_3 = T_4 = T_C$)

4 \rightarrow 1 : ADIABATIQUE ($Q=0$) $\Rightarrow dS=0$: ISENTROPIQUE

QUESTIONS :

(a) PRESSIONS et VOLUMES MASSIQUES en CHAQUE POINT DU CYCLE ?

(b) TRAVAUX et QUANTITES de CHALEUR echangees avec l'exterieur ?
 \Rightarrow RENDEMENT ?

(a) PRESSIONS et VOLUMES en CHAQUE POINT du CYCLE

↓
 $m = 1 \text{ kg} \Rightarrow$ VOLUME MASSIQUE \equiv VOLUME en valeur numérique

$P_1 = 10^5 \text{ Pa} ; T_1 = 288 \text{ K} ; V_1 = \dots$
 $P_2 = \dots ; T_2 = T_1 = 288 \text{ K} ; V_2 = \dots$
 $P_3 = 6 \cdot 10^6 \text{ Pa} ; T_3 = 823 \text{ K} ; V_3 = \dots$
 $P_4 = \dots ; T_4 = T_3 = 823 \text{ K} ; V_4 = \dots$

On calculera les VOLUMES à travers l'EQUATION D'ETAT:

$$PV = mRT \Rightarrow \boxed{V = \frac{mRT}{P}}$$

Il faut calculer les PRESSION P_2, P_4 . Pour ce faire on utilise les relations valables pour des TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES REVERSIBLES (p.ex. LOI de LAPLACE).

$i \rightarrow f$ ADIABATIQUE REVERSIBLE
 $Q = dS = 0$

LOI de LAPLACE: $P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma ; \gamma = \frac{C_p}{C_v} ; C_p = C_v + R$

$$\Rightarrow P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma$$

Mais on ne connaît pas tous les volumes nécessaires pour faire le calcul.

Pour contre on connaît les températures, il faut donc éliminer les volumes pour faire apparaître les températures.

$$\frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = \left(\frac{\frac{mRT_i}{P_i}}{\frac{mRT_f}{P_f}} \right)^\gamma = \left(\frac{P_f}{P_i} \right)^\gamma \left(\frac{T_i}{T_f} \right)^\gamma \Rightarrow$$

$$V = \frac{mRT}{P} \text{ (eq. d'état)}$$

$$\Rightarrow P_f^{1-\gamma} = P_i^{1-\gamma} \left(\frac{T_i}{T_f} \right)^\gamma \Rightarrow$$

$$\boxed{P_f = P_i \left(\frac{T_i}{T_f} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_i \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^{\frac{C_p}{R}}}$$

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{C_p}{C_v} \frac{1}{1-\frac{C_p}{C_v}} = \frac{C_p}{C_v - C_p} = -\frac{C_p}{R}$$

• TRANSFORMATIONS ADIABATIQUES :

$$2 \rightarrow 3 : P_3 = P_2 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{C_p}{R}} \Rightarrow$$

$$P_2 = P_3 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{C_p}{R}} = 1,55 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$4 \rightarrow 1 : P_1 = P_4 \left(\frac{T_1}{T_4} \right)^{\frac{C_p}{R}} \Rightarrow$$

$$P_4 = P_1 \left(\frac{T_4}{T_1} \right)^{\frac{C_p}{R}} = 38,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

• EQUATION D'ETAT :

$$V_k = nR \frac{T_k}{P_k} \quad k = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 = nR \frac{T_1}{P_1} \approx 0,83 \text{ m}^3 \\ V_2 = nR \frac{T_2}{P_2} \approx 0,53 \text{ m}^3 \\ V_3 = nR \frac{T_3}{P_3} \approx 0,038 \text{ m}^3 \\ V_4 = nR \frac{T_4}{P_4} \approx 0,06 \text{ m}^3 \end{cases}$$

(b) TRAVAUX et QUANTITES de CHALEUR

$$1 \rightarrow 2 : \Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} ; \Delta U_{1 \rightarrow 2} = 0 \Rightarrow Q = -W_{1 \rightarrow 2}$$

ISOTHERME (T = T₁)

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = nRT_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 36,2 \text{ KJ}$$

↑
 eq. état + T = T₁ → isotherme
 $P_1 V_1 = nRT_1$
 $P_2 V_2 = nRT_2$ ⇒ $\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$

$Q_{1 \rightarrow 2} < 0$ CÉDÉE (à la source froide)
 $W_{1 \rightarrow 2} > 0$ REÇU (pour diminuer le volume)

$$2 \rightarrow 3 : \Delta U_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} + W_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3} \Rightarrow Q_{2 \rightarrow 3} = 0 \text{ (ADIABATIQUE)}$$

$$\Rightarrow W_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = mC_V (T_3 - T_2) = 381,4 \text{ KJ} ; W_{2 \rightarrow 3} > 0 \text{ REÇU (diminution du volume)}$$

GAZ PARFAIT

$$3 \rightarrow 4 : \Delta U_{3 \rightarrow 4} = 0 \text{ ISOTHERME (comme } 1 \rightarrow 2)$$

$$W_{3 \rightarrow 4} = nRT_3 \ln \left(\frac{P_4}{P_3} \right) = -103 \text{ KJ} < 0 \text{ FOURNI par le GAZ (cédé; expansion: augmentation du volume)}$$

$$Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = 103 \text{ KJ} > 0 \text{ REÇU (contact avec la source chaude)}$$

$$4 \rightarrow 1 : Q_{4 \rightarrow 1} = 0 \text{ ADIABATIQUE (comme } 2 \rightarrow 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} = mC_V (T_1 - T_4) = -381,4 \text{ KJ} < 0 \text{ FOURNI par le gaz (cédé, expansion)}$$

• CALCUL du RENDEMENT :

$$W = \sum W_{i \rightarrow i+1} = -66,8 \text{ KJ} ; Q_C = Q_{3 \rightarrow 4} = 103 \text{ KJ}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_C} = 0,648 \text{ (RENDEMENT)}$$

$$T_F = T_1 \quad (r\acute{e}versibilit\acute{e} \text{ thermique}) \Rightarrow \eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,65$$

EX.2 : CYCLE DE SABATHE

ON NEGLIGE : COMBUSTION

m = 1 kg AIR → GAZ PARFAIT

CYCLE :

1 → 2 : COMPRESSION ADIABATIQUE $P_2 > P_1; V_2 < V_1$

LOI DE LAPLACE : $P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} < V_1$

2 → 3 : ECHAUFFEMENT ISOCHORE

$P_3 = \frac{mRT_3}{V_3} = \frac{mRT_3}{V_2} > P_2$, car $T_3 > T_2$

3 → 4 : ECHAUFFEMENT ISOBARE

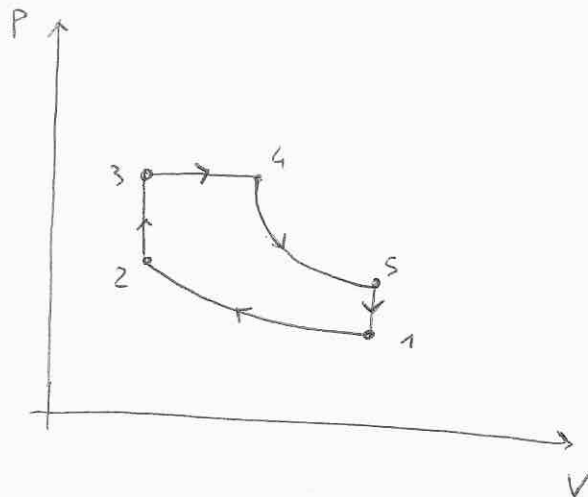
$V_4 = \frac{mRT_4}{P_4} = \frac{mRT_4}{P_3} > V_3$, car $T_4 > T_3$

4 → 5 : DETENTE ADIABATIQUE; $V_5 = V_1$

$V_5 = V_4 \left(\frac{P_4}{P_5} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$; $P_5 < P_4$ (détente) $\Rightarrow \frac{P_4}{P_5} > 1 \Rightarrow V_5 > V_4$

Retour à l'état initial [$V_5 = V_1 \Rightarrow$ ISOCHORE (refroidissement)]

(*) 5 → 1



- $V_1 = V_5 = 0,927 \text{ m}^3$
- $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$
- $T_2 = 787 \text{ K}$
- $T_3 = 1603 \text{ K}$
- $T_4 = 2473 \text{ K}$
- $T_5 = 1208 \text{ K}$

	PRESSION (P_2)	TEMPERATURE (K)	VOLUME (m^3)
ETAT 1	10^5	323	0,927
ETAT 2	$2,2 \cdot 10^6$	787	0,1014
ETAT 3	$4,5 \cdot 10^6$	1603	0,1014
ETAT 4	$4,5 \cdot 10^6$	2473	0,1577
ETAT 5	$3,7 \cdot 10^5$	1208	0,927

→ QUESTIONS :

(a) COMPLÉTER le TABLEAU : $T_1, P_2, V_2, V_3, T_4, V_4, T_5$

(b) $Q_i, W_i = ?$

(c) RENDÉMENT ? COMPARAISON AVEC MOTEUR CARNOT ?

$R = 287 \frac{J}{kgK}$
 $C_V = 713 \frac{J}{kgK}$

(a)

GAZ PARFAIT : $P_1 V_1 = m \cdot R \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1}{m R} \approx 323 K \quad (*)$
 (EQ. ETAT)

REMARQUE: Pour les ADIABAT-TRAVES on aurait pu utiliser aussi la LOI de LAPLACE et, éventuellement, l'équation d'état des gaz parfaits.

1 → 2 : COMPRESSION ADIABATIQUE (réversible)

On connaît : T_1, T_2, P_1
 et on cherche : P_2
 \Downarrow
 $S = S(T, P)$

$dS = m \left[(C_V + R) \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \right] = 0 \Rightarrow \delta Q = T dS = 0$
 ENTHALPIE du G.P.

$\Rightarrow \frac{C_V + R}{R} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_V + R}{R}} \quad (*)_1$

En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :

$\frac{m R \frac{T_2}{V_2}}{m R \frac{T_1}{V_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_V + R}{R}} \Rightarrow \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_V + R}{R}} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_V + R}{R} - 1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_V}{R}}$
 $\Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{C_V}{R}} \quad (*)_2$

$\Rightarrow P_2 \approx 2,2 \cdot 10^6 Pa$ avec $(*)_1 \quad (*)$
 $V_2 \approx 0,1014 m^3$ avec $(*)_2 \quad (*)$

2 → 3 : ISOCHORE $\Rightarrow V_3 = V_2 = 0,1014 m^3 \quad (*)$

EQ. ETAT GAZ PARFAIT $\rightarrow P_3 = \frac{m R T_3}{V_3} = 4,5 \cdot 10^6 Pa \quad (*)$

3 → 4 : ISOBARE $\Rightarrow P_4 = P_3 = 4,5 \cdot 10^6 Pa \quad (*)$

EQ. ETAT GAZ PARFAIT $\rightarrow V_4 = \frac{m R T_4}{P_4} = 0,1577 m^3 \quad (*)$

On connaît : T_4, T_5, P_4
 et on cherche : P_5
 $\Rightarrow S = S(T, P)$

4 → 5 : DÉTENTE ADIABATIQUE

$dS = m \left[(C_V + R) \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \right] = 0 \Rightarrow \delta Q = T dS = 0 \Rightarrow \dots$ en procédant comme \Rightarrow pour 1 → 2...
 $\Rightarrow P_5 = P_4 \left(\frac{T_5}{T_4}\right)^{\frac{C_V + R}{R}} = 3,7 \cdot 10^5 \quad (*)$

CONTROLE: $P_S V_S = n R T_S$ (é.p. étet G.P.) $\Rightarrow V_S = \frac{n R T_S}{P_S} = 0,837 \text{ m}^3$ OK! [6]

(b)

1 \rightarrow 2: ADIABATIQUE $\Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{G.P.}}}{m C_V (T_2 - T_1)} = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

> 0 TRAVAIL REÇU
par le gaz

2 \rightarrow 3: ISOCHORE $\Rightarrow dV = 0 \Rightarrow W_{2 \rightarrow 3} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = m C_V (T_3 - T_2) = 5,8 \cdot 10^5 \text{ J}$$

3 \rightarrow 4: ISOBARE $\Rightarrow dp = 0 \Rightarrow W_{3 \rightarrow 4} = - \int_{V_3}^{V_4} p dV = -P_3 (V_4 - V_3) =$

$$= -2,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

< 0 TRAVAIL FOURNI par le gaz

$$Q_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4} - W_{3 \rightarrow 4} =$$

$$= m C_V (T_4 - T_3) + P_3 (V_4 - V_3) = 8,7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

4 \rightarrow 5: ADIABATIQUE $\Rightarrow Q_{4 \rightarrow 5} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{4 \rightarrow 5} = \Delta U_{4 \rightarrow 5} = m C_V (T_5 - T_4) = -9 \cdot 10^5 \text{ J}$$

< 0 TRAVAIL
FOURNI par
le gaz

5 \rightarrow 1: ISOCHORE $\Rightarrow dV = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{5 \rightarrow 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{5 \rightarrow 1} = \Delta U_{5 \rightarrow 1} = m C_V (T_1 - T_5) = -6,3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

(c)

7

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0; Q_{4 \rightarrow 5} = 0$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} > 0; Q_{3 \rightarrow 4} > 0 \Rightarrow Q_C = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = 14,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

(reçue par le gaz)

$$Q_{5 \rightarrow 1} < 0 \Rightarrow Q_F = Q_{5 \rightarrow 1} = -6,3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

(cédée par le gaz)

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + \underbrace{W_{2 \rightarrow 3}}_0 + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 5} + \underbrace{W_{5 \rightarrow 1}}_0 = W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 5} =$$

$$= (3,3 - 2,5 - 9) \cdot 10^5 \text{ J} = -8,2 \cdot 10^5 \text{ J} < 0$$

le système CÈDE
du TRAVAIL \Leftrightarrow
 \Leftrightarrow MOTEUR

$$\eta = \frac{|W|}{Q_C} = \frac{8,2 \cdot 10^5}{14,5 \cdot 10^5} \approx 0,57 \quad \text{RENDEMENT}$$

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_1}{T_4} \approx 0,87$$

la moins élevée
la plus élevée

• REMARQUE : $|W_S| \gg |W_C|$

\uparrow C. SABATHE \leftarrow C. CARNOT

● CYCLE CARNOT :

$$W_C = -(Q_C + Q_F) = - \left[m n T_C \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) + m n T_F \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right] =$$

$\Delta U = 0$
(CYCLE)

$$= - \left[m n \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) \left[\begin{matrix} T_C \\ T_4 \end{matrix} - \begin{matrix} T_F \\ T_1 \end{matrix} \right] \right] = - 2,7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

