

Méthodes numériques pour l'ingénieur (Polytech'Lille, Méca3)

Enrico Calzavarini (bureau F128), Stefano Berti (bureau F110)

8 mars 2023

TD 4 : Valeurs et vecteurs propres

Problème 1

L'état de contrainte dans un solide est défini par le tenseur suivant (en MPa) dans une base donnée :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le but est de déterminer la plus grande contrainte principale dans ce solide. Elle correspond à la valeur propre maximale de la matrice ci-dessus. On la déterminera par la méthode de la puissance itérée, en partant du vecteur initial $\mathbf{q}_0 = (1, 1/2, 1)^T$. On utilisera la norme infinie pour normaliser les vecteurs : $\|\mathbf{q}\|_\infty = \sup_{i=1,n} |q_i|$

- Faire 4 pas de la méthode et préciser les approximations \mathbf{q}_k ($k = 1, 2, 3, 4$).
- Calculer aussi l'estimation $\lambda_{(j)}^{(k)}$ de la valeur propre cherchée à chaque itération k (pour chaque élément $j = 1, 2, 3$ du vecteur propre).

Résolution

première itération ($k = 1$) :

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 5 + 5/2 + 0 \\ 5 + 0 + 5 \\ 0 + 5/2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 10 \\ 15/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_\infty} = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 10 \\ 15/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(j=1)}^{(k=1)} = \frac{(\mathbf{v}_1)_{j=1}}{(\mathbf{q}_0)_{j=1}} = \frac{15}{2}; \quad \lambda_{(j=2)}^{(k=1)} = \frac{(\mathbf{v}_1)_{j=2}}{(\mathbf{q}_0)_{j=2}} = 20; \quad \lambda_{(j=3)}^{(k=1)} = \frac{(\mathbf{v}_1)_{j=3}}{(\mathbf{q}_0)_{j=3}} = \frac{15}{2}$$

deuxième itération ($k = 2$) :

$$\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 15/4 + 5 \\ 15/4 + 15/4 \\ 5 + 15/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/4 \\ 15/2 \\ 35/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_\infty} = \begin{pmatrix} 35/4 \\ 15/2 \\ 35/4 \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{35} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(j=1)}^{(k=2)} = \frac{(\mathbf{v}_2)_{j=1}}{(\mathbf{q}_1)_{j=1}} = \frac{35}{3}; \quad \lambda_{(j=2)}^{(k=2)} = \frac{(\mathbf{v}_2)_{j=2}}{(\mathbf{q}_1)_{j=2}} = \frac{15}{2}; \quad \lambda_{(j=3)}^{(k=2)} = \frac{(\mathbf{v}_2)_{j=3}}{(\mathbf{q}_1)_{j=3}} = \frac{35}{3}$$

troisième itération ($k = 3$) :

$$\mathbf{v}_3 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 5 + 30/7 + 0 \\ 5 + 0 + 5 \\ 0 + 30/7 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65/7 \\ 10 \\ 65/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|_\infty} = \begin{pmatrix} 65/7 \\ 10 \\ 65/7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 13/14 \\ 1 \\ 13/14 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(j=1)}^{(k=3)} = \frac{(\mathbf{v}_3)_{j=1}}{(\mathbf{q}_2)_{j=1}} = \frac{65}{7}; \quad \lambda_{(j=2)}^{(k=3)} = \frac{(\mathbf{v}_3)_{j=2}}{(\mathbf{q}_2)_{j=2}} = \frac{70}{6}; \quad \lambda_{(j=3)}^{(k=3)} = \frac{(\mathbf{v}_3)_{j=3}}{(\mathbf{q}_2)_{j=3}} = \frac{65}{7}$$

quatrième itération ($k = 4$) :

$$\mathbf{v}_4 = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 5 \cdot 13/14 + 5 \\ 5 \cdot 13/14 + 5 \cdot 13/14 \\ 5 + 5 \cdot 13/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135/14 \\ 130/14 \\ 135/14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \frac{\mathbf{v}_4}{\|\mathbf{v}_4\|_\infty} = \begin{pmatrix} 135/14 \\ 130/14 \\ 135/14 \end{pmatrix} \cdot \frac{14}{135} = \begin{pmatrix} 1 \\ 26/27 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(j=1)}^{(k=4)} = \frac{(\mathbf{v}_4)_{j=1}}{(\mathbf{q}_3)_{j=1}} = \frac{135}{13}; \quad \lambda_{(j=2)}^{(k=4)} = \frac{(\mathbf{v}_4)_{j=2}}{(\mathbf{q}_3)_{j=2}} = \frac{130}{14}; \quad \lambda_{(j=3)}^{(k=4)} = \frac{(\mathbf{v}_4)_{j=3}}{(\mathbf{q}_3)_{j=3}} = \frac{135}{13}$$

Les valeurs de $\lambda_{(j=2)}^{(k)}$ et de $\lambda_{(j=1)}^{(k)} = \lambda_{(j=3)}^{(k)}$ oscillent autour de la valeur 10 et en deviennent de plus en plus proche à chaque itération k . Nous estimons donc que la plus grande valeur propre de la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ est $\lambda_1 = 10$.

Ceci recoupe le spectre de la matrice $\boldsymbol{\sigma}$ qui est $Sp_{\boldsymbol{\sigma}} = (-5; 5; 10)$. Le comportement des trois estimations ($j = 1, 2, 3$) de la valeur propre en fonction du nombre d'itérations est montré dans le graphique de la Fig. 1 (où des approximations à 6 chiffres décimaux sont utilisées pour les valeurs fractionnaires).

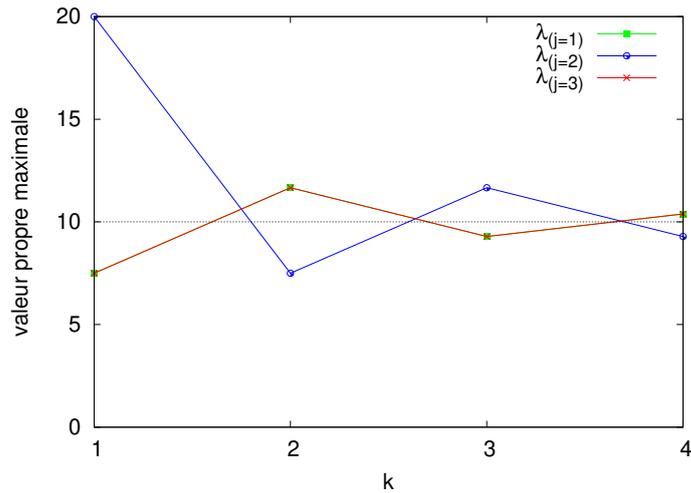


FIGURE 1 – Comportement des trois estimations ($j = 1, 2, 3$) de la valeur propre maximale en fonction du nombre d'itérations.

Problème 2

Trouver toutes les valeurs propres de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer la première valeur propre par la méthode de la puissance itérée, en partant du vecteur initial $\mathbf{q}_0 = (1, 0)^T$. Ici on utilisera la norme euclidienne $\|\mathbf{q}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$ pour normaliser les vecteurs \mathbf{q}_k (k est l'indice d'itération) ainsi que le quotient de Rayleigh pour l'estimation de la valeur propre à chaque itération. Faire au moins 4 itérations.
- Déterminer par calcul direct (analytiquement) le vecteur propre associé à la valeur propre trouvée.
- Déterminer la seconde valeur propre en utilisant la méthode de déflation.

Résolution

a)

Estimation initiale de la valeur propre ($k = 0$), avec le quotient de Rayleigh :

$$\lambda^{(k=0)} = \frac{\mathbf{q}_0^T A \mathbf{q}_0}{\mathbf{q}_0^T \mathbf{q}_0} = 3$$

première itération ($k = 1$) :

$$\mathbf{v}_1 = A \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=1)} = \frac{\mathbf{q}_1^T A \mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1} = \frac{24}{10} = 2.4$$

deuxième itération ($k = 2$) :

$$\mathbf{v}_2 = A \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{49+9}} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{58} \\ -3/\sqrt{58} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=2)} = \frac{\mathbf{q}_2^T A \mathbf{q}_2}{\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2} = \frac{126}{58} = 2.1724$$

troisième itération ($k = 3$) :

$$\mathbf{v}_3 = A \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{58} \\ -7/\sqrt{58} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|_2} = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{58} \\ -7/\sqrt{58} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{15^2+7^2}} = \begin{pmatrix} 15/\sqrt{274} \\ -7/\sqrt{274} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=3)} = \frac{\mathbf{q}_3^T A \mathbf{q}_3}{\mathbf{q}_3^T \mathbf{q}_3} = \frac{570}{274} = 2.080$$

quatrième itération ($k = 4$) :

$$\mathbf{v}_4 = A \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{274} \\ -15/\sqrt{274} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \frac{\mathbf{v}_4}{\|\mathbf{v}_4\|_2} = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{274} \\ -15/\sqrt{274} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{274}}{\sqrt{31^2+15^2}} = \begin{pmatrix} 31/\sqrt{1186} \\ -15/\sqrt{1186} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(k=4)} = \frac{\mathbf{q}_4^T A \mathbf{q}_4}{\mathbf{q}_4^T \mathbf{q}_4} = \frac{2418}{1186} = 2.0388$$

La plus grande valeur propre de la matrice A (dorénavant nommée λ_1) approche la valeur 2.

b) Ici nous faisons l'hypothèse que la valeur asymptotique de λ_1 (atteint par la méthode de la puissance itérée) est bien $\lambda_1 = 2$, et nous calculons le vecteur propre correspondant $\mathbf{x}_1 = [a, b]^T$.

$$A \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 2a & \Rightarrow & a = -2b \\ -a &= 2b \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_1 = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et avec normalisation (en choisissant } b = 1) \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

c)

Rappels sur la méthode de la déflation :

- On suppose connu le couple $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$, calculé à partir de la puissance itérée.
- On forme la matrice $A^{(1)} = A - \lambda_1 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1}$ (qui possède les mêmes valeurs propres que la précédente sauf λ_1 qui est remplacée par 0).
- On applique la méthode de la puissance itérée à $A^{(1)}$ pour trouver le couple $(\lambda_2, \mathbf{x}_2)$ où λ_2 est la valeur propre de plus grand module de $A^{(1)}$ et \mathbf{x}_2 le vecteur propre associé.

$$A^{(1)} = A - \lambda_1 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T}{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 14/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Estimation initiale de la valeur propre (k=0), avec le quotient de Rayleigh :

$$\lambda_2^{(k=0)} = \frac{\mathbf{q}_0^T A^{(1)} \mathbf{q}_0}{\mathbf{q}_0^T \mathbf{q}_0} = 7/5 = 1.4$$

itération $k = 1$:

$$\mathbf{v}_1 = A^{(1)} \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|_2} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{50/25}} = \begin{pmatrix} 7/(5\sqrt{2}) \\ -1/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2^{(k=1)} = \frac{\mathbf{q}_1^T A^{(1)} \mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1} = 1$$

itération $k = 2$:

$$\mathbf{v}_2 = A^{(1)} \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 7/(5\sqrt{2}) \\ -1/(5\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|_2} = \mathbf{q}_1 \Rightarrow \text{le processus a donc convergé!}$$

$$\lambda_2^{(k=2)} = \frac{\mathbf{q}_2^T A^{(1)} \mathbf{q}_2}{\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2} = 1$$

La deuxième valeur propre est $\lambda_2 = 1$.