

# Examen de Mécanique des fluides appliquée

7 avril 2021

**Durée : 4 heures**

- Vous devez déposer votre copie au **format PDF** sur Moodle :

<https://moodle.univ-lille.fr/course/view.php?id=14344>.

En cas de problèmes avec le dépôt, contactez par email l'enseignant ([stefano.berti@polytech-lille.fr](mailto:stefano.berti@polytech-lille.fr)) avant la fin de l'épreuve (12h, le 07/04/2021).

*Les fichiers reçus après la date limite ne seront pas pris en considération.*

- Cet examen est constitué de deux parties. Veuillez trouver ci-dessous les horaires limite pour effectuer les dépôts de vos fichiers pour chacune de ces deux parties.

**Partie 1** : après 1 heure, **soit avant 9h, le 07/04/2021.**

**Partie 2** : après 4 heures, **soit avant 12h, le 07/04/2021.**

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

## Partie 1

### Questions de cours (5 points)

Q1) La dynamique d'un fluide visqueux dans le champ de la pesanteur est gouvernée par l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{g}, \quad (1)$$

où  $\vec{u}$  est le champ de vitesse,  $\rho$  la masse volumique,  $\nu$  la viscosité cinématique,  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur.

(a) Identifier le terme non-linéaire (ou inertiel) dans l'Eq. (1).

(b) Sachant que le nombre de Reynolds  $Re$  correspond au rapport entre le terme inertiel et le terme visqueux, quelle forme prend l'Eq. (1) dans la limite  $Re \ll 1$ ? Comment on appelle cette équation?

(c) Sachant que le nombre de Froude  $Fr$  correspond au rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle gravitationnelle, quelle forme prend l'Eq. (1) dans la limite  $Fr \gg 1$ ?

(1,5 points)

Q2) Donner l'expression de la puissance dissipée  $W$  par les pertes de charge  $\xi_{12}$  entre deux sections (1 et 2) dans l'écoulement d'un fluide visqueux. Dédurre cette relation à partir du théorème de Bernoulli généralisé. (2 points)

Q3) On considère une conduite horizontale en régime permanent établi. Le coefficient de perte de charge unitaire  $\Lambda$ , en régime turbulent, peut être calculé en utilisant la loi de Colebrook-White :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2,51}{Re\sqrt{\Lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71D} \right), \quad (2)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds,  $\epsilon$  la rugosité absolue et  $D$  le diamètre de la conduite.

- (a) Dans l'Eq. (2), identifier le terme correspondant au régime lisse et celui correspondant au régime rugueux.  
(b) La viscosité dynamique  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , la longueur de la conduite  $L$ , la rugosité absolue  $\epsilon$  sont généralement connues. Si on suppose de connaître aussi le diamètre  $D$  et le débit  $q_v$ , comment peut-on déterminer les pertes de charge linéaires  $\xi_{lin}$  (dues à la viscosité)?  
(1,5 points)

## Partie 2

### Exercice 1 : Dynamique des fluides visqueux (5 points)

On considère l'écoulement bidimensionnel d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et de masse volumique  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , sur une plaque plane fixe. On suppose  $\vec{u} = (u(y), 0)$  et une répartition de la vitesse dans la direction  $x$  du type

$$u(y) = \frac{1}{4}y^2,$$

où la coordonnée  $y$  dénote la distance de la paroi (en  $y = 0$ ).

- Q1) Dire si le fluide de cet écoulement est incompressible et pourquoi. (0,5 points)
- Q2) Dans l'expression de la vitesse  $u(y)$  la constante  $a = 1/4$  apparaît (voir ci-dessus). Déterminer les dimensions physiques et les unités de mesure de  $a$ . (0,5 points)
- Q3) En utilisant la formule de Newton, déterminer l'expression de la contrainte visqueuse  $\tau$  en fonction de la coordonnée  $y$  et de la viscosité dynamique  $\mu$ . (0,5 points)
- Q4) Dans quel écoulement remarquable on trouve les mêmes dépendances fonctionnelle de la distance  $y$  de la paroi pour  $u(y)$  et  $\tau(y)$ ? (0,5 points)
- Q5) Quelles sont les dimensions physiques et les unités de mesure de la contrainte visqueuse? (0,5 points)
- Q6) Calculer la valeur de la contrainte  $\tau$  à la paroi et à 3 cm de la paroi. (1 point)
- Q7) Déterminer les expressions des éléments du tenseur des taux de déformation  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , où  $u_i$  sont les composantes du vecteur vitesse,  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$ . (1 point)
- Q8) Calculer la trace du tenseur des taux de déformation  $D$  et justifier le résultats trouvés. (0,5 points)

### Exercice 2 : Pertes de charge (5 points)

On considère un siphon (Figure 1) constitué par un tuyau de diamètre  $D = 50 \text{ cm}$ , alimenté par un récipient rempli d'eau (masse volumique :  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), de grande dimension par rapport à  $D$  et ouvert à l'atmosphère ( $p_{atm} \simeq 10^5 \text{ Pa}$ ). Dans cet exercice on admettra que le coefficient de perte de charge linéaire est  $\Lambda = 0,02$ , que les pertes de charge singulières sont uniquement dues au coude en  $M$  et que leur coefficient est  $K = 0,18$ . On donne les longueurs  $L_{AM} = 18 \text{ m}$  et  $L_{MS} = 32 \text{ m}$ , la différence de hauteur  $H = 4 \text{ m}$ , et  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  (accélération de la pesanteur).

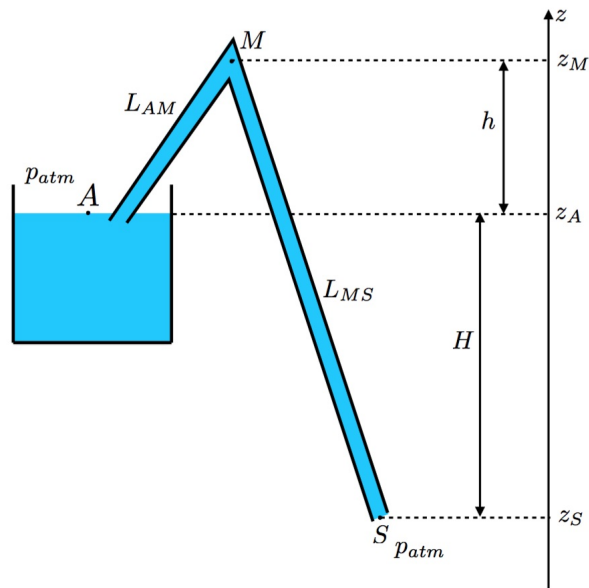


FIGURE 1 – Siphon.

Q1) Écrire l'équation de Bernoulli généralisée entre  $A$  et  $S$ . (0,5 points)

Q2) À partir de l'équation précédemment établie, déterminer l'expression de la vitesse  $v_S$  à la sortie (point  $S$ ) en fonction de  $H$  (et des autres paramètres). Calculer la valeur numérique de  $v_S$ . (1,5 points)

Q3) Écrire l'équation de Bernoulli généralisée entre  $A$  et  $M$ . Ici on ne prendra pas en compte la perte de charge due au coude en  $M$ . (0,5 points)

Q4) À partir de l'équation établie à la question Q4), déterminer l'expression de la pression  $P_M$  au point  $M$  en fonction de la différence de hauteur  $h$ . (1 point)

Q5) Représenter dans un graphique l'allure de la pression  $P_M$  en fonction de  $h$ . (1 point)

Q6) Quelle est la valeur maximale admise pour  $h$ ? (0,5 points)

### Exercice 3 : Couche limite (5 points)

Dans l'écoulement d'un fluide sur une plaque mince et plate, on admet que la distribution des vitesses dans la couche limite laminaire répond à l'équation :

$$\frac{u}{U} = \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right),$$

où  $U$  est la vitesse du fluide libre (loin de l'obstacle),  $u$  est la vitesse dans la couche limite (fonction de la distance  $y$  de la paroi),  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite.

On donne :  $U = 15 \text{ m/s}$ ,  $L = 2 \text{ m}$ ,  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .

Q1) Calculer le nombre de Reynolds  $R_L$  basé sur la longueur de la plaque  $L$ . (0,5 points)

Q2) Déterminer l'expression de la contrainte visqueuse  $\tau$  dans la couche limite laminaire, ainsi que l'expression de  $\tau_p \equiv \tau(y = 0)$  à la paroi en fonction de  $\delta$ . (0,5 points)

Q3) En prenant la valeur  $R_c = 10^5$  pour le nombre de Reynolds critique, déterminer le point de transition (à la turbulence)  $x^*$ . (0,5 points)

Q4) En sachant que, dans la couche limite laminaire,  $\delta = 4,789 \frac{x}{\sqrt{R_x}}$ , où  $x$  est la coordonnée le long de la paroi et  $R_x$  est le nombre de Reynolds basé sur la distance  $x$ , calculer l'épaisseur de la couche limite, ainsi que la valeur de la contrainte à la paroi, au point de transition. (0,5 points)

Q5) En sachant que le coefficient de frottement local est  $C_f = \frac{0,656}{\sqrt{R_x}}$ , calculer l'expression du coefficient de frottement moyen  $C_F$ , dans la couche limite laminaire, en fonction du nombre de Reynolds basé sur la longueur  $x^*$ , ainsi que sa valeur numérique. (1 point)

Q6) Calculer la force de frottement (moyenne) s'exerçant sur la plaque dans la couche limite laminaire. Dans ce calcul on admettra que la longueur transversale de la plaque est  $\ell = 4$  m. En déduire la valeur (moyenne) correspondante  $\overline{\tau_p}$  de la contrainte à la paroi dans la couche limite laminaire. (1 point)

Q7) Tracer le graphique du profil de vitesse  $u(y)$  dans le plan  $(x, y)$ . (1 point)