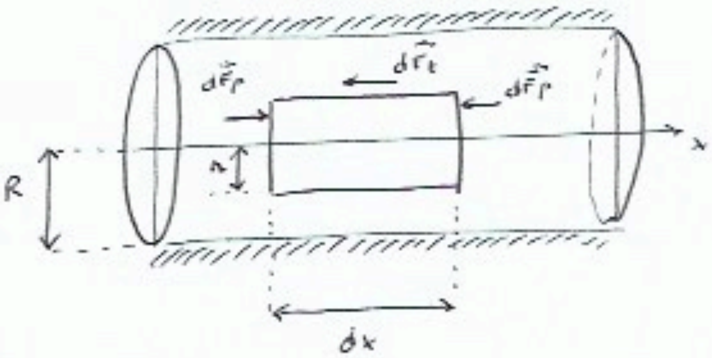
TD1 : ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE CYLINDRIQUE

HORIZONTAL ⇒ PAS de PESANTEUR



$\vec{U} = (u, v, w)$

$v = w = 0$; $u = u(r)$

ÉCOULEMENT PERMANENT

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$

$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Q1) FORCES le long de l'axe x

- FORCES de PRESSION

  à l'amont : $\pi r^2 p$; $p > 0$

  à l'aval : $-\pi r^2 (p + dp)$; $p + dp > 0$

- FORCES de VISCOSITÉ (surface latérale) : $2\pi r\, dx\, \tau$; $\tau < 0$

  avec $\tau = \frac{dF_t}{dS}$ (CONTRAINTE)

  Symétrie de l'écoulement ⇒ τ a la même valeur dans tous les points de la surface latérale.

- PESANTEUR (force de volume) : pas de composante le long de l'axe x

Q2)

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v}}_{\vec{a}} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v} + \cancel{\vec{F}} \quad \text{(ÉQ. NS)}$$

← FORCE de VOLUME : $\vec{F} = \vec{0}$ ici

ÉQUILIBRE : $\vec{a} = 0$ (écoulement unidirectionnel permanent)

$$0 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v}$$

(x) : $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\, \Delta v_x = 0$ ⇒ ÉQUILIBRE entre FORCE de PRESSION et FORCES de VISCOSITÉ →

← LAPLACIEN

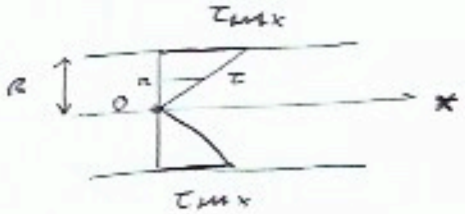
⇒ ÉQUILIBRE des FORCES :

$$\pi r^2 p - \pi r^2 (p + dp) + 2\pi r \, dx \, \tau = 0$$

Q3) $\tau = \dfrac{r}{2} \dfrac{dp}{dx}$

Q4) $0 \leq r \leq R \Rightarrow \tau_{max} = \tau_p = \dfrac{R}{2} \dfrac{dp}{dx}$ (à la paroi) CONTRAINTE MAXIMALE

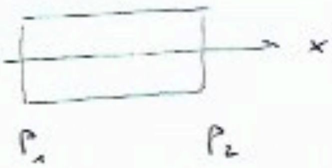
pour $r = 0$ (centre) : $\tau = 0$ → croissance linéaire de la contrainte visqueuse avec la distance du centre.



Q5) τ ⟷ FORCE VISCOSITÉ : opposée à la vitesse → $\tau < 0$ ⇒

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dx} < 0 \Rightarrow p \searrow$ avec $x \nearrow$

$p_2 < p_1$



Q6) $\tau = \dfrac{dF_t}{dS} = \eta \dfrac{\partial v}{\partial n}$; Dans ce cas : $\tau = \eta \dfrac{\partial u}{\partial r} = \eta \dfrac{du}{dr}$

NEWTON

n : DIRECTION NORMALE (à la surface latérale)

v : VITESSE (ici : $v = u$) générique

$\tau < 0 \Rightarrow \dfrac{du}{dr} < 0$; $u \searrow$ avec $r \nearrow$

$$\tau = \eta \frac{du}{dr} \rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{\tau}{\eta} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx}$$

Q7)

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta}\,\frac{dp}{dx}$$

$\frac{dp}{dx}$ = const sur la section considérée et indép. de r ⇒

$$\Rightarrow\ u(r) = \frac{1}{2\eta}\,\frac{dp}{dx}\,\frac{r^2}{2} + c\ ;\quad c = \text{const}$$

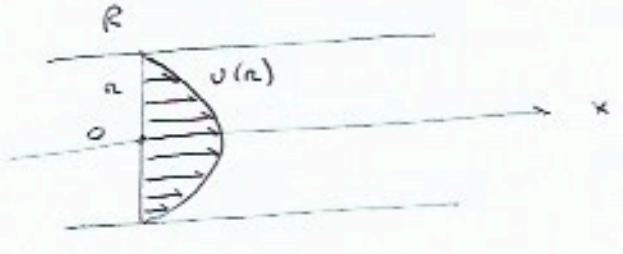
Détermination de c :

À la paroi : $u = 0$ $(r = R)$ ⇒ $0 = \frac{R^2}{4\eta}\frac{dp}{dx} + c$ ⇒

$$\Rightarrow\ c = -\frac{R^2}{4\eta}\,\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{u(r) = -\frac{1}{4\eta}\,\frac{dp}{dx}\,(R^2 - r^2)}$$

PROFIL de VITESSE : PARABOLE avec sommet sur l'axe x.



$$u(r = R) = 0$$

$$u_{max} = u(r=0) = -\frac{1}{4\eta}\,\frac{dp}{dx}\,R^2 \qquad \text{(au centre)}$$ VITESSE MAXIMALE

Q8)

$dS = 2\pi r\,dr$ ⇒ $dq_v = u \cdot dS = 2\pi r\,u(r)\,dr$ ⇒

$$u(r) = -\frac{1}{4\eta}\,\frac{dp}{dx}\,(R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{dq_v = -\frac{\pi}{2\eta}\,\frac{dp}{dx}\,(R^2 - r^2)\,dr}$$ DÉBIT VOLUMÉTRIQUE dans un ANNEAU ÉLÉMENTAIRE

Q9) DÉBIT VOLUMÉTRIQUE :

$$q_v = \int_0^R dq_v = -\frac{\pi}{2\eta}\frac{dp}{dx}\int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr = -\frac{\pi}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_v = -\frac{\pi}{8}\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}R^4}$$

$R = \frac{D}{2}$; D : DIAMÈTRE $\Rightarrow \boxed{q_v = -\frac{\pi}{128}\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}D^4}$

FORMULE de POISEVILLE

q_v PROPORTIONNEL à D^4

Q10) VITESSE MOYENNE :

v_m : $q_v = v_m \cdot S$

$S = \pi R^2$

$\Rightarrow \boxed{v_m = \frac{q_v}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\eta}\frac{dp}{dx}R^2}$

REMARQUE : $v_m = \frac{v_{max}}{2}$

Q11)

$D = 5\,mm \rightarrow R = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,m$

$\Delta x = 3\,m$

$(\Delta p < 0)$ $\Delta p = -3\,bar = -3 \cdot 10^5\,Pa$

$\eta = 0{,}26$ poise $= 0{,}026\,Pa \cdot s$

1 bar = 10^5 Pa

1 poise = 0,1 Pl (Poiseville)

1 Pl = 1 Pa · s

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{\Delta x} = -10^5\,\frac{Pa}{m}$$

$$q_v = \frac{\pi}{8}\frac{1}{0{,}026}\cdot 10^5 (2{,}5 \cdot 10^{-3})^4 = 5{,}9 \cdot 10^{-5}\,\frac{m^3}{s} = 212\ l/h$$

$1\,l = 1\,dm^3 = 10^{-3}\,m^3$

$1\,m^3 = 10^3\,l$

$1\,s = \frac{1}{3600}\,h$

$S = \pi R^2 = 19{,}63 \cdot 10^{-6}\,m^2$

$v_m = \frac{q_v}{S} = 3\,m/s$

$v_{max} = 2 v_m = 6\,m/s$