

4.3. CALCUL DES PERTES DE CHARGE EN CONDUITE

4.30. INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

4.30.1. Expérience de Schiller-Reynolds

Un tube horizontal en verre comportant deux prises de pression est alimenté par un réservoir en charge. Une vanne placée à l'extrémité permet de faire varier la vitesse de l'écoulement. Un tube effilé alimenté par un réservoir de colorant permet d'obtenir un filet fluide coloré au centre du tube. On observe l'allure de l'écoulement en faisant varier la vitesse.

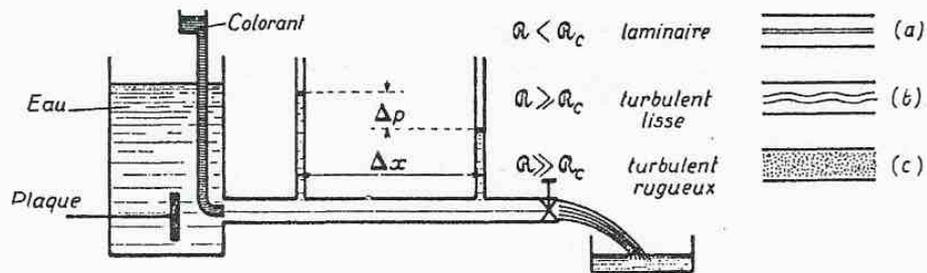


FIG. 4.30.1. — Expérience de SCHILLER-REYNOLDS.

a) Aux faibles vitesses, le filet coloré conserve son individualité jusqu'à l'extrémité (fig. a). La perte de pression Δp est faible.

Le régime est dit *laminaire*.

b) A partir d'une certaine vitesse de l'écoulement, le filet fluide commence à onduler un certain temps (fig. b) avant de se mélanger au reste du fluide. En même temps, on constate une augmentation brutale de Δp et une diminution de l'amplitude du jet à la sortie, ce qui traduit une discontinuité dans l'évolution de l'écoulement.

Le régime est dit *turbulent lisse*.

c) Si on augmente encore le débit, les tourbillons augmentent d'amplitude et le filet coloré se mélange à l'écoulement presque aussitôt après son introduction (fig. c).

Le régime est dit *turbulent-rugueux*.

La valeur du nombre de REYNOLDS de l'écoulement dans le tuyau pour lequel le régime devient turbulent est appelé nombre de REYNOLDS critique et désigné par R_c .

La valeur de \mathcal{R}_c dépend beaucoup des précautions prises à l'établissement de l'écoulement. Si par exemple, le liquide est au repos depuis quelques jours dans le récipient et si la vanne est ouverte très progressivement, on pourra atteindre $\mathcal{R}_c = 20\ 000$.

Au contraire, dans le cas le plus défavorable, si le récipient est en cours de remplissage et si la plaque est ramenée au voisinage de l'orifice du tuyau pour essayer de perturber l'écoulement au maximum, on aura environ

$$\mathcal{R}_c = 2\ 000.$$

C'est, en général, cette dernière valeur qui est choisie comme critère : si $\mathcal{R} < 2\ 000$, on est certain que l'écoulement est laminaire.

4.30.2. Influence de la rugosité des parois. Courbes de Nikuradse

L'expérience précédente ne permet pas de faire apparaître l'influence de la rugosité des parois. La *figure 4.30.2 a* montre les résultats d'essais effectués par NIKURADSE sur des conduites rendues rugueuses artificiellement par des grains de sable collés.

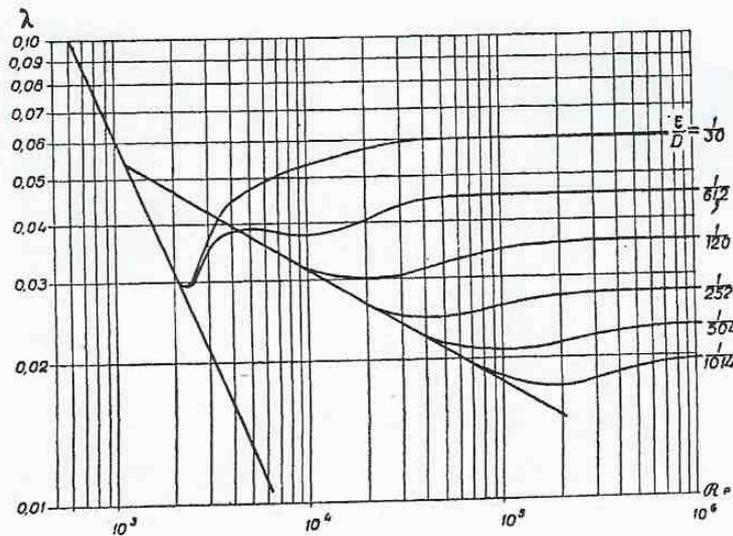


FIG. 4.30.2 a. — Courbe de NIKURADSE.

Ces courbes représentent, en coordonnées logarithmiques, le coefficient de perte de charge unitaire λ en fonction du nombre de REYNOLDS. Elles sont tracées pour diverses valeurs de la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{D}$.

ε = diamètre des grains de sable collés;

D = diamètre de la conduite.

L'examen de ce réseau de courbes montre que :

a) La rugosité n'a aucune influence pour le régime laminaire. La valeur de \mathcal{R}_c est pratiquement indépendante de la rugosité des parois.

b) La forme des courbes pour $\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_c$ et donc l'importance des pertes de charge dépend beaucoup de la rugosité. En particulier, pour un tube très rugueux $\left(\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1}{30}\right)$, le régime turbulent lisse est presque inexistant.

c) Pour $\mathcal{R} \gg \mathcal{R}_c$ (régime turbulent rugueux), la valeur du coefficient de perte de charge unitaire λ est indépendante du nombre de REYNOLDS. Elle est uniquement fonction de la rugosité des parois.

On remarque la grande analogie entre les conclusions tirées des études expérimentales précédentes et ce qui vient d'être vu dans l'étude des couches limites. La comparaison entre les courbes de NIKURADSE et la figure 4.24.1 d, qui représente $c_F = f(\mathcal{R}_l)$ pour une plaque, est particulièrement significative. De ce fait les résultats semi-empiriques obtenus pour les couches limites turbulentes vont pouvoir être utilisés pour établir les expressions donnant les pertes de charge en conduite pour les régimes correspondants.

La figure 4.30.2 b représente schématiquement l'interprétation des trois régimes d'écoulement sur une courbe de NIKURADSE correspondant à une rugosité relative moyenne. Les expressions indiquées sur cette figure sont étudiées dans les § suivants.

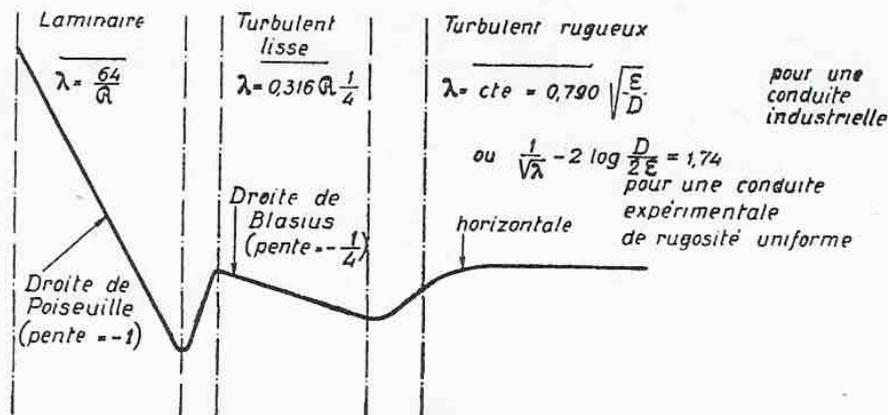


FIG. 4.30.2 b. — Interprétation des régimes d'écoulement sur une courbe de NIKURADSE.

4.31. ÉTUDE DES TROIS RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

4.31.1. Relations entre le coefficient de perte de charge unitaire et la cission à la paroi

Soit une conduite horizontale de section cylindrique circulaire, de diamètre D , et qui est le siège d'un écoulement permanent établi, c'est-à-dire

dont le profil des vitesses ne se modifie pas si on se déplace axialement le long de la conduite (voir § 4.34.3). Cette constante du profil des vitesses entraîne :

$$\lambda = C^{te}, \quad \tau_p = C^{te} \quad \text{et} \quad c_f = c_F = C^{te}$$

Les quantités d'accélération étant nulles, l'application de la loi fondamentale de la dynamique au fluide contenu dans un tronçon de conduite de longueur L conduit à écrire l'égalité entre la différence des forces de pression aux extrémités $\Delta p \pi D^2/4$ et la résultante des forces de frottement à la paroi $\tau_p \pi D L$ (voir généralisation en 4.32).

En exprimant Δp en fonction du coefficient de perte de charge unitaire λ (voir § 4.08.4) et en désignant par $c = \frac{q_v}{\pi D^2/4}$ la vitesse moyenne de débit dans la conduite, on obtient :

$$\lambda \frac{L}{D} \rho \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau_p \pi D L$$

ce qui donne, après simplification :

$$\lambda = \frac{8\tau_p}{\rho c^2} = 4c_f$$

et, en faisant apparaître la vitesse de cisson à la paroi $u_f = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$,

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{c}{u_f}$$

Rappelons (§ 4.08) que si la conduite n'est pas horizontale, les calculs précédents restent valables à condition de remplacer la pression p par la pression motrice p_a .

4.31.2. Régime laminaire

Dans ce régime, toujours obtenu pour $R < 2\,000$, les lignes de courant conservent leur individualité; la turbulence naturelle est amortie par les forces de viscosité. S'il n'existe pas de turbulence naturelle (liquide resté longtemps au repos), on peut obtenir ce régime jusqu'à $R = 20\,000$.

Le calcul direct de cet écoulement a déjà été fait en 4.07.

La loi des vitesses est parabolique (fig. 4.07.3) c'est-à-dire que les couches limites laminaires occupent l'ensemble de la conduite, la vitesse étant maximale au centre.

La cisson τ_p à la paroi et la vitesse moyenne de débit c sont respectivement (en valeur absolue) (4.07.3 et 4.07.4) :

$$\tau_p = \frac{R}{2} \frac{dp}{dx} \quad c = \frac{1}{8\eta} \frac{dp}{dx} R^2$$

d'où, en éliminant dp/dx et en introduisant le diamètre de la conduite :

$$\tau_p = 8\eta c/D$$

Le coefficient de frottement à la paroi est donc :

$$c_F = \frac{\tau_p}{\rho c^2/2} = \frac{16}{\rho c D/\eta} = \frac{16}{\mathcal{R}}$$

et le coefficient de perte de charge unitaire λ :

$$\lambda = 4c_F = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

expression qui peut aussi s'établir directement à partir de la forme classique de la loi de POISEUILLE (§ 4.08.3).

Avec la représentation en échelles logarithmiques on obtient donc une droite de pente -1 , dite droite de POISEUILLE (*fig. 4.30.2 b*). On retrouve que d'après la définition de λ , la perte de charge en régime laminaire pour un fluide donné et une conduite donnée est directement proportionnelle à la vitesse moyenne de débit et, par conséquent, au débit volume dans la conduite.

• RÉGIME TURBULENT LISSE

Ce régime s'établit pour un domaine de nombres de Reynolds variable, dont la limite inférieure dépend de la turbulence naturelle et la limite supérieure de la rugosité des parois. L'écoulement est turbulent à l'intérieur de la conduite, mais il existe, le long de la paroi, une sous-couche limite visqueuse qui recouvre les aspérités. On dit encore que la paroi est "hydrauliquement lisse".

Dans ce domaine, pour $Re < 10^5 \Rightarrow$ loi de BLASIUS : $\lambda = 0,316 Re^{-1/4}$
(approximativement $\frac{1}{3}$ valide)

MIEILLEURE APPROXIMATION à partir de :

$$\frac{\bar{u}}{u_f} = 5,75 \log \left(\frac{y u_f}{\nu} \right) + 5,5$$

LOI LOGARITHMIQUE

On admet que l'influence de la rugosité des parois de la conduite est négligeable et que l'on peut négliger la sous-couche limite visqueuse, la loi précédente s'étend vérifiée dans l'ensemble de la section.

Après cela et introduction du nombre de Reynolds de la conduite $R = \frac{v D}{\nu}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,033 \log(R \sqrt{\lambda}) - 0,811$$

Étant donné les hypothèses simplificatrices admises pour le casel, cette loi ne peut ~~être~~ ~~qu'~~ qu'être approchée. PRANDTL a ajusté les coefficients numériques pour obtenir une meilleure correspondance avec les résultats expérimentaux de NIKURADSE. \Rightarrow

\rightarrow EXPRESSION CORRESPONDANTE :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(R\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

\leftarrow LOI DE PRANDTL-NIKURADSE

\Downarrow en regroupant la constante à l'intérieur du logarithme \swarrow

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2,51}{R\sqrt{\lambda}}\right)$$

• RÉGIME TURBULENT RUGUEUX

NOMBRE de REYNOLDS (R) CROÎT \Rightarrow ÉPAISSEUR SOUS-COUCHE VISQUEUSE DIMINUE

Si R est suffisamment grand \Rightarrow les aspérités de la paroi traversent la couche limite, la paroi devient "hydrauliquement rugueuse".

L'écoulement est alors turbulent dans son ensemble, ce qui produit un brassage des particules fluides d'où une égalisation des vitesses. La distribution des vitesses se rapproche de celle que l'on obtiendrait par un fluide parfait. Le gradient de vitesse est

très important au voisinage de la paroi, ce qui explique l'augmentation des forces de viscosité.

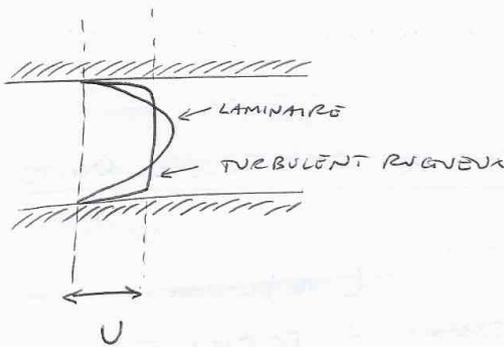
DISTRIBUTION des VITESSES :

Loi de PARSON

$$\frac{\bar{u}}{u_f} = 5,75 \log\left(\frac{y}{\epsilon}\right) + 8,5$$

↑
RUGOSITÉ

(on admet qu'elle est valable dans toute la section de la conduite)



Après calcul, on obtient une loi approchée (à cause des hypothèses simplificatrices).

KARMAN, qui en est l'auteur, a ajusté les coefficients numériques pour obtenir une meilleure correspondance avec les résultats expérimentaux de Nikuradse.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log\left(\frac{D}{2\epsilon}\right) + 1,74}$$



$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{\epsilon}{3,71 D}\right)}$$

LOI DE
KARMAN-NIKURADSE

Pour les usages couramment rencontrés dans les conduites industrielles, on peut utiliser aussi la FORMULE (EMPIRIQUE) de BLANCH:

$$\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\epsilon}{D}}$$

→ • LOI GÉNÉRALE DE PERTE DE CHARGE DE COLEBROOK-WHITE

Régime TURBULENT LISSE (PRANDTL)

Régime TURBULENT RUGUEUX (KARMAN)

} regroupés dans la FORMULE:

LOI GÉNÉRALE DE
COLEBROOK-WHITE

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R, \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3,71 D} \right)$$

Le premier et le second terme à l'intérieur de la parenthèse tendent respectivement vers zéro si le nombre de Reynolds devient très grand ou si la rugosité des parois devient négligeable. Cette expression tend donc asymptotiquement vers la loi de PRANDTL en régime turbulent lisse et vers la loi de KARMAN en régime turbulent rugueux.

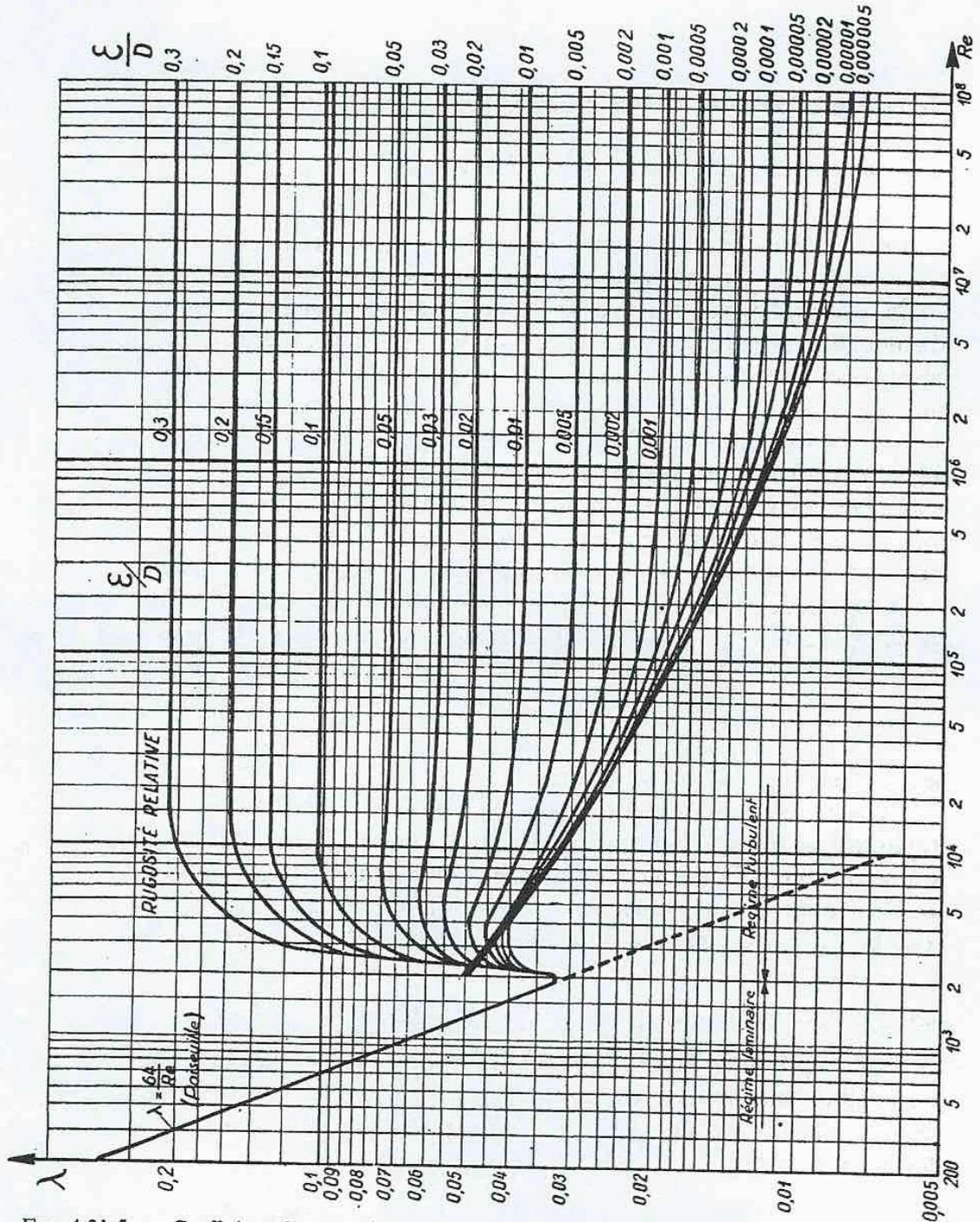


FIG. 4.31.5. - Coefficient de perte de charge λ en régime turbulent rugueux (formule de COLEBROOK).

Dans la zone intermédiaire de transition entre les deux régimes, l'expérience montre que cette loi représente la perte de charge avec une précision suffisante pour les calculs pratiques, bien que les valeurs de λ obtenues soit légèrement supérieures à celles fournies par l'expérience.

La représentation de cette expression en coordonnées logarithmiques est connue sous le nom de diagramme de COLEBROOK (fig. 4.31.5).

4.32. PERTE DE CHARGE EN CONDUITE DE SECTION NON CIRCULAIRE

Lorsque la pression de transport d'un fluide est très différente de la pression atmosphérique, les lois de la résistance des matériaux, appliquées à la paroi de la conduite, conduisent au choix logique d'une conduite de section circulaire. Ce n'est plus le cas si la pression effective de transport est faible, par exemple pour les gaines de ventilation ou de conditionnement d'air, pour lesquelles une section rectangulaire conduit à un prix de revient moins élevé.

Généralisons dans ce cas l'étude du § 4.31.1. Soit une conduite rectiligne cylindrique de section quelconque et de section d'écoulement S . On appelle *périmètre mouillé* B , la fraction de périmètre en contact avec le fluide (les notions de section d'écoulement et de périmètre mouillé sont introduites afin de permettre une généralisation ultérieure aux canaux ou aux conduites de liquide non remplies (voir § 4.4).

Soit τ_p la force de frottement par unité de surface de paroi mouillée. En écrivant l'équilibre d'un élément longitudinal Δl (fig. 4.32) avec les mêmes hypothèses et conventions qu'en 4.08.1, on obtient :

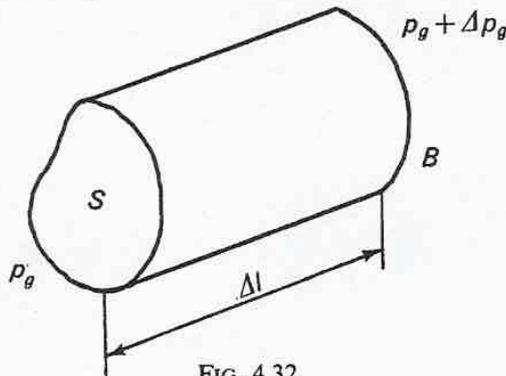


FIG. 4.32.

$$\iint_S p_g \, dS - \iint_S (p_g + \Delta p_g) \, dS + \Delta l \int_B \tau_p \, dB = 0$$

Les sections étant normales à l'écoulement moyen, la pression motrice y est constante, d'où :

$$\Delta p_g \cdot S = \Delta l \int_B \tau_p \, dB$$

En première approximation, on admet aussi que τ_p est une constante sur toute la surface mouillée d'où

$$\frac{\Delta p_g}{\Delta l} = \tau_p \frac{B}{S} = \frac{\tau_p}{R_h}$$

en posant $R_h = \frac{S}{B} = \frac{\text{Section d'écoulement}}{\text{Périmètre mouillé}} = \text{Rayon hydraulique de la section d'écoulement}$.

Les relations du § 4.31.1 peuvent s'écrire :

$$\tau_p = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho c^2}{2},$$

d'où

$$\frac{\Delta p_g}{\Delta l} = \frac{\lambda}{4R_h} \frac{\rho c^2}{2} = \frac{\lambda}{D_h} \frac{\rho c^2}{2},$$

en posant $D_h = 4R_h = \frac{4S}{B} = \text{diamètre hydraulique de la section}$.

Cette méthode de calcul permet donc d'établir, pour une section quelconque, une expression de la perte de charge analogue à celle vue pour les conduites de section circulaire. On passe d'une expression à l'autre en remplaçant le diamètre de la section circulaire par le diamètre hydraulique de la section quelconque. On peut d'ailleurs vérifier que pour une section circulaire de diamètre D et complètement remplie :

$$D_h = \frac{4S}{B} = \frac{\pi D^2}{\pi D} = D$$

De même on détermine le coefficient de perte de charge unitaire λ en utilisant le diagramme de COLEBROOK, le nombre de Reynolds caractéristique de la conduite $\mathcal{R} = cD_h/\nu$ et la rugosité relative ε/D_h étant calculées à partir du diamètre hydraulique.

Il faut remarquer que cette méthode n'est qu'approximative, τ_p n'étant pas constant sur la paroi dans le cas général (ce qui était rigoureux dans le cas d'une section circulaire, à cause de la symétrie axiale). Néanmoins elle donne de bons résultats pour des conduites de section carrée ou rectangulaire si le rapport des longueurs des côtés du rectangle reste compris entre 1/3 et 3.

4.35. APPLICATION AU CALCUL PRATIQUE DES CONDUITES

4.35.1. Classification des problèmes de calcul de conduites

Nous nous limiterons dans un premier temps au calcul des conduites horizontales en régime permanent établi, pour lesquelles la perte de charge est égale à la chute de pression statique dans la conduite.

La viscosité dynamique η et la masse volumique ρ du fluide étant connues, ainsi que la longueur L de la conduite et sa rugosité absolue ε (fonction du matériau utilisé et du type de fabrication) on rencontre trois types de problèmes :

1. – Déterminer la chute de pression dans la conduite connaissant son diamètre et un débit volume imposé.
2. – Déterminer le débit-volume dans la conduite connaissant son diamètre et une chute de pression imposée.
3. – Déterminer le diamètre de la conduite connaissant le débit volume qu'elle doit être capable d'assurer sous une chute de pression imposée.

C'est ce dernier problème que l'on rencontre le plus fréquemment dans la pratique industrielle, et c'est aussi le plus difficile à résoudre.

La loi générale de perte de charge de COLEBROOK-WHITE (§ 4.31.5) a une forme algébrique qui conduit souvent à des calculs numériques par itération. De ce fait on utilise plus fréquemment des méthodes graphiques basées sur l'utilisation du diagramme de COLEBROOK. Ces méthodes ont une précision suffisante pour la pratique industrielle. A ce point de vue on peut remarquer que, d'une part le choix du diamètre d'une conduite ne peut se faire que dans une série normalisée par les fabricants et que, d'autre part, la rugosité absolue ε évolue d'une façon peu prévisible pendant la durée de vie d'une conduite sous l'effet des salissures de l'entartrage ou de l'érosion, obligeant le projeteur à se réserver une marge de sécurité.

Nous n'insisterons pas sur le premier problème, dont la résolution est immédiate : les données permettent le calcul direct du nombre de Reynolds et de la rugosité relative. La lecture directe du diagramme de COLEBROOK fournit le coefficient de perte de charge unitaire λ ce qui permet le calcul de la chute de pression.

La résolution des problèmes 2 et 3 est beaucoup plus délicate puisque les données n'y permettent pas le calcul initial du nombre de Reynolds, ni celui de la rugosité relative dans le problème 3. Nous utiliserons des méthodes proposées par DAILY et HARLEMAN. La résolution automatique de ces problèmes sur ordinateur à l'aide d'un programme FORTRAN universel est possible et présente un grand intérêt mais elle dépasse le cadre de cet ouvrage ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ B. DESMET, M. MEUNIER, R. OUZIAUX : Programmation universelle FORTRAN de la loi de COLEBROOK-WHITE appliquée aux trois types de problèmes posés par le calcul des pertes de charge en conduite. Publications scientifiques et techniques de l'E.N.S.A.M. (n° 8, 1976).

4.35.2. Calcul du débit volume dans une conduite

Les données du problème sont η , ρ , L , ε , D et Δp . Il est possible de calculer la rugosité relative ε/D , mais la vitesse moyenne c serait nécessaire pour calculer le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = \rho c D / \eta$. En éliminant c entre cette expression et la définition du coefficient de perte de charge unitaire $\lambda = \frac{\Delta p}{L} \cdot \frac{D}{\rho c^2 / 2}$, on peut écrire le nombre de Reynolds sous la forme

$$\mathcal{R} = \frac{D^{3/2}}{\eta} \left(\frac{2\rho \Delta p}{L} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2}}$$

On constate donc qu'il est possible, avec les données du problème de calculer le groupement sans dimensions

$$\mathcal{R} \sqrt{\lambda} = \frac{D^{3/2}}{\eta} \left(\frac{2\rho \Delta p}{L} \right)^{1/2}$$

Remarquons aussi que ce groupement $\mathcal{R} \sqrt{\lambda}$ intervient globalement dans le second membre de l'équation de COLEBROOK. Le calcul direct de λ par cette expression devient possible ce qui permet la détermination immédiate de c puis de q_v .

Graphiquement on utilise un diagramme de COLEBROOK complété par un réseau de courbes $\mathcal{R} \sqrt{\lambda} = C''$. Les échelles étant logarithmiques ce sont des droites parallèles de pente -2 . La résolution du problème est schématisé par la *figure 4.35.2*. Les données ayant permis le calcul de $\mathcal{R} \sqrt{\lambda}$ et de ε/D , l'intersection des courbes correspondantes fournit λ et \mathcal{R} , à partir desquels on calcule c et q_v . La droite $\mathcal{R} \sqrt{\lambda} = C''$ nécessaire à cette détermination peut, par exemple, être tracée sur la *figure 4.31.5*.

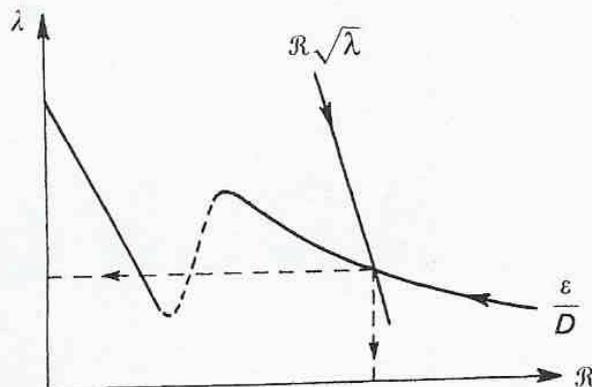


FIG. 4.35.2.

4.35.3. Calcul du diamètre d'une conduite

Les données du problème sont $\eta, \rho, L, \varepsilon, q_v$ et Δp . Il est impossible de calculer directement la rugosité relative et le nombre de Reynolds. En introduisant le débit volume dans l'expression du coefficient de perte de charge unitaire on établit l'expression :

$$D^5 = \frac{8\rho L q_v^2 \lambda}{\pi^2 \Delta p}$$

On choisit une valeur courante de λ (comprise le plus souvent entre 0,02 et 0,04) d'où on calcule une première approximation de D , ce qui permet une évaluation de ε/D et de \mathcal{R} . En reportant sur le diagramme de COLEBROOK, on détermine une valeur plus exacte de λ à partir de laquelle on recommence le calcul en deuxième approximation et ainsi de suite.

On peut réduire le nombre d'itérations en remarquant que le report de l'expression précédente de D dans le nombre de Reynolds permet le calcul du groupement sans dimensions :

$$\mathcal{R}\lambda^{1/5} = \frac{4}{\eta} \left(\frac{\Delta p q_v^3 \rho^4}{8\pi^3 L} \right)^{1/5}$$

$\mathcal{R}\lambda^{1/5} = C^e$ se représente par une droite de pente -5 dans le diagramme de COLEBROOK en échelles logarithmiques et constitue un lieu géométrique du point figuratif (on peut aussi utiliser un diagramme portant un réseau de droites $\mathcal{R}\lambda^{1/5} = C^e$).

L'itération se fait alors en choisissant une valeur approximative de la rugosité relative ε/D qui fournit un point figuratif provisoire à l'intersection du lieu précédent. Ce point permet le calcul du diamètre d'où une valeur plus exacte de ε/D . Compte tenu de la grande pente de $\mathcal{R}\lambda^{1/5}$, ε/D a une faible influence sur la valeur du nombre de Reynolds et une troisième itération est rarement nécessaire.

4.35.6. Problèmes économiques relatifs aux conduites

Dans le cas d'un circuit industriel comportant une pompe ou une turbine, le diamètre de la conduite n'est pas imposé, comme dans un transvasement, par les lois de l'écoulement. Il sera le plus souvent déterminé par des conditions économiques.

Si on choisit un petit diamètre, les frais d'investissement seront plus faibles, mais les pertes d'énergie en exploitation plus élevées (ce qui correspond à une dépense pour une pompe ou à un manque à gagner pour une turbine). Au contraire, si on augmente le diamètre, les frais d'investissement augmentent et les pertes d'énergie en exploitation diminuent.

La solution idéale consiste à choisir un compromis entre ces deux points de vue. A titre d'exemple, nous allons faire un calcul simplifié ne tenant compte que de la conduite.

Le prix de la conduite est proportionnel à sa masse. A contrainte égale, l'épaisseur est proportionnelle au diamètre. La valeur de l'annuité de l'amortissement peut donc se mettre, pour une installation donnée, sous la forme $A_1 = k_1 D^2$, k_1 étant un coefficient qui dépend de la longueur, du prix unitaire, du mode de montage et de la durée de l'amortissement.

L'énergie annuelle perdue par frottement est proportionnelle à J , mais d'après l'expression

$$J = \lambda \frac{L}{D} \frac{c^2}{2g} = \frac{8\lambda L q_v^2}{\pi^2 g D^5}.$$

On peut mettre la perte annuelle correspondante sous la forme

$$A_2 = \frac{k_2}{D^5},$$

k_2 dépendant des autres caractéristiques données et du prix de l'énergie.
La dépense annuelle totale est donc

$$A = A_1 + A_2 = k_1 D^2 + \frac{k_2}{D^5}.$$

Elle sera minimale pour la valeur de D qui annule $\frac{dA}{dD}$.

$$\frac{dA}{dD} = 2k_1 D - 5 \frac{k_2}{D^6} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{k_2}{D^5} = \frac{2}{5} k_1 D^2.$$

C'est-à-dire que, avec les hypothèses faites, le diamètre optimal est celui pour lequel le prix de la perte d'énergie annuelle est les deux cinquièmes de l'annuité d'amortissement.

Dans le cas général, on peut opérer graphiquement comme sur la figure 4.34.

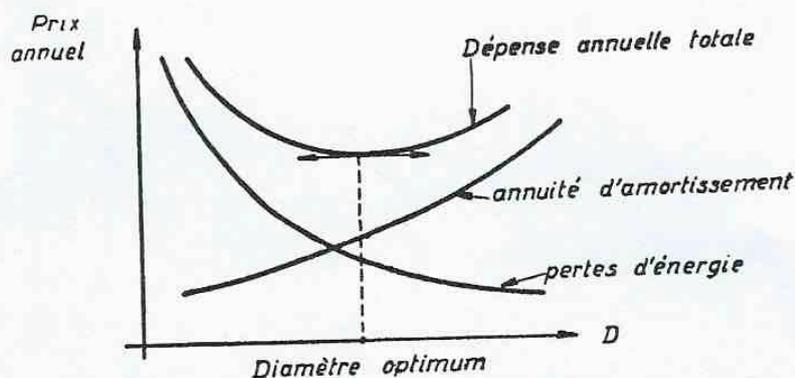


FIG. 4.35.6. — Calcul économique d'une conduite.

Pour les petites installations courantes, ce calcul conduit le plus souvent à des vitesses de l'ordre de 1 m/s pour l'eau et 10 m/s pour les gaz.

Remarquons que cette méthode n'est pas absolument valable dans tous les cas, d'autres facteurs pouvant intervenir comme le risque de coups de béliers, l'impossibilité d'admettre de trop grandes variations de charge en fonction du débit, l'utilisation de conduites de diamètre et d'épaisseur variables pour l'alimentation des turbines à haute pression, etc...