MFA

PERTES de CHARGE

• RAPPELS : FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F}$$

EQ. EULER (Bilan quantité mouvement)

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

INCOMPRESSIBILITÉ

$\vec{F}$: FORCE de VOLUME (par unité de masse)

$\vec{F}$ dérivant d'un potentiel

Typiquement en HYDRODYNAMIQUE : $\vec{F}$ est la PESANTEUR

$\vec{F} = -g\vec{e_z}$; $\vec{e_z}$: $|\vec{e_z}| = 1$

$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$; $U = gz$ ÉNERGIE POTENTIELLE GRAVITATIONNELLE (par unité de masse)

$V = -U$ (POTENTIEL)

En introduisant : $p_g = p + \rho g z$ (ρ = const, ici) PRESSION MOTRICE ⟹

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p_g$$

cette équation peut être écrite aussi dans la forme :

$$(*)_1 \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega}\wedge\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}X$$

où : $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} \equiv \mathrm{rot}(\vec{v})$ est la VORTICITÉ

et $X = p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} = p_g + \frac{\rho v^2}{2}$ est la CHARGE de l'écoulement (ou FONCTION de BERNOULLI)

• THÉORÈME de BERNOULLI :

1

Résultat important pour les applications pratiques qui peut être déduit du bilan local d'énergie cinétique lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- MOUVEMENT PERMANENT
- FLUIDE NON VISQUEUX
- " INCOMPRESSIBLE
- FORCES EXTÉRIEURES de VOLUME dérivent d'un POTENTIEL

$$\boxed{X = p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}}$$

sur une LIGNE de COURANT (ou une trajectoire ; les deux coïncident vu que l'écoulement est permanent).

REMARQUES

(1) CONSERVATION de l'ÉNERGIE MÉCANIQUE

En écrivant le TH. de BERNOULLI pour l'UNITÉ de MASSE, on a :

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

↓ ↓ ↓

ÉNERGIES MASSIQUES $\left(J/kg = m^2/s^2\right)$

gz : énergie potentielle massique

$\frac{v^2}{2}$: énergie cinétique massique

$\frac{p}{\rho} = p V_m = \int_0^p V_m \, dp'$: travail que l'unité de masse peut fournir → énergie potentielle massique de pression.

2) EXPRESSION RELATIVE à l'UNITÉ de POIDS

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{const.}}$$

UTILISÉE en HYDRAULIQUE

Les GRANDEURS, ici, sont HOMOGÈNES à une HAUTEUR de LIQUIDE.

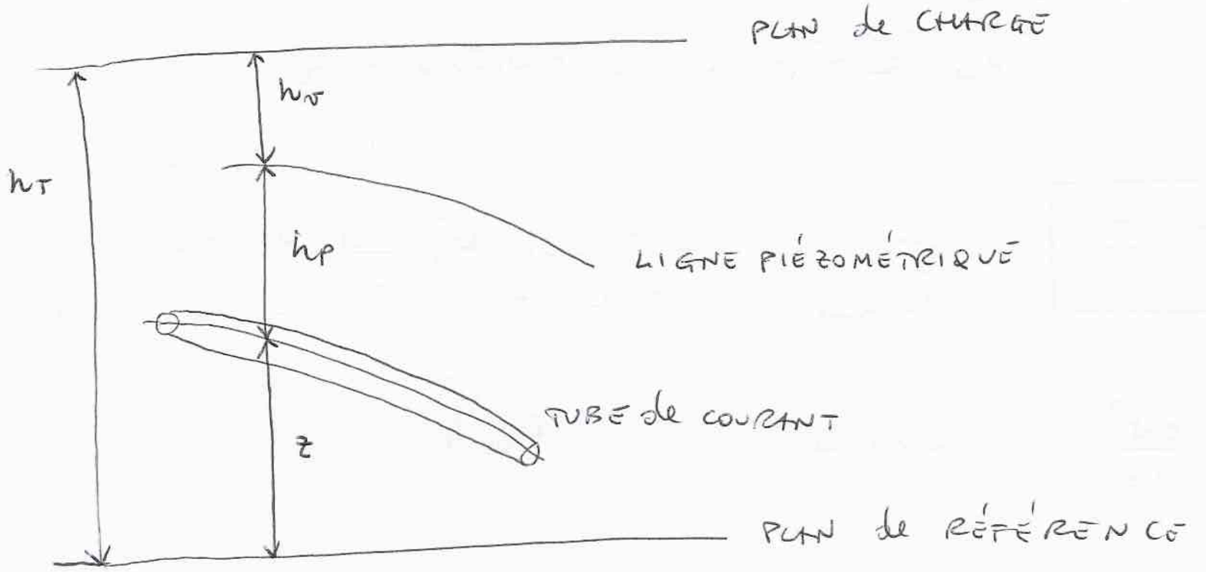
z : COTE, HAUTEUR de POSITION du point considéré.

$h_v = \frac{v^2}{2g}$: HAUTEUR CINÉTIQUE (c'est la hauteur d'où doit tomber dans le vide une particule fluide pour acquérir la vitesse $v = \sqrt{2g h_v}$)

$h_p = \frac{p}{\rho g}$: HAUTEUR d'une COLONNE de FLUIDE qui mesure la PRESSION p.

$h_z = \frac{p}{\rho g} + z$: HAUTEUR PIÉZOMÉTRIQUE

$h_T = z + h_p + h_v$: HAUTEUR correspondant à la CHARGE TOTALE.



• PERTES de CHARGE SINGULIÈRES :

Pour pouvoir calculer les écoulements réels, avec PERTES de CHARGE, on peut utiliser le TH. de BERNOULLI en rajoutant un terme pour modéliser et prendre en compte les pertes de charge :

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \xi_{12}$$

MONTANT de PERTE de CHARGE entre les deux sections 1 et 2.

PERTES CHARGES
- dues à la DISSIPATION d'ÉNERGIE (FROTTEMENT VISQUEUX)
- dues à des SINGULARITÉS rencontrées par un écoulement (élargissement brusque, contraction de veine, coude, vanne, robinet, ...)

PRÉSENTES MÊME dans un FLUIDE NON VISQUEUX

On constate expérimentalement que ce type de pertes de charges sont :

(i) PROPORTIONNELLES à v^2

(ii) DÉPENDANTES de la FORME de la SINGULARITÉ

$$\boxed{\xi_{12} = c \frac{\rho v^2}{2}}$$

; avec c = const qui dépend de la forme de l'objet (coefficient sans dimensions)

$$h_{12} = \frac{c v^2}{2g}$$ (mesuré en mètre)

ex. :

ÉLARGISSEMENT BRUSQUE : $c = (1-\alpha)^2$; $\alpha = \frac{A_1}{A_2}$; A_1 : section en amont
A_2 : " " aval

(*)$_2$

PERTES de CHARGE : FLUIDE VISQUEUX (Newtonien, incompressible)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}}_{} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}$$

EQ. NAVIER-STOKES
avec : $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$; $\rho = \text{const}$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 \quad \text{(identité)} \; ; \; \vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{v} \equiv \text{rot}(\vec{v})$$

Hypothèses :

- Écoulement permanent $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
- $\vec{F}$: PESANTEUR $\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}(g z)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}\wedge\vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z\right) + \nu \Delta \vec{v} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} X = \overset{\eta}{\overset{\parallel}{\nu\rho}}\,\Delta\vec{v} - \rho\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

$$X = \rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z$$

En intégrant le long d'une ligne de courant on obtient :

$$\underbrace{\vec{\nabla} X \cdot d\vec{x}}_{dX} = \eta\,\Delta\vec{v}\cdot d\vec{x} \quad ; \text{ car } (\vec{\omega}\wedge\vec{v})\cdot d\vec{x} = 0$$

$d\vec{x} \parallel \vec{v}$
$\vec{\omega}\wedge\vec{v} \perp \vec{v}, d\vec{x}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dX = \eta\,\Delta\vec{v}\cdot d\vec{x}} \quad \text{PERTE de CHARGE}$$

L'équation de Bernoulli $X = \text{const}$ n'est donc plus valable pour un filet de fluide visqueux.

dX : PERTE de CHARGE (due à la VISCOSITÉ η) = PERTE d'ÉNERGIE par UNITÉ de VOLUME

Cette énergie est à la fois dissipée au sein du tube de courant et transformée en chaleur et échangée avec les tubes de courant voisins à cause des forces de viscosité.

• PERTE de CHARGE UNITAIRE
(ou perte de charge en ligne)

$$X = p + \rho g z + \frac{\rho v^2}{2}$$

CHARGE

TUYAU de SECTION CONSTANTE $\Rightarrow \frac{\rho v^2}{2} = \text{cst}$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p + \rho g z\right) = \frac{dp_g}{dx}$$

PERTE de CHARGE par unité de longueur

Si on exprime ce terme en hauteur de fluide, on aura, par définition

$$j = -\frac{1}{\rho g}\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{\rho g}\frac{dp_g}{dx} = -\frac{dh_T}{dx} = -\frac{dh_p}{dx}$$

$dX < 0 \Rightarrow j > 0$

$\frac{\rho v^2}{2} = \text{cst}$

$\frac{X}{\rho g} = h_T$

$\frac{dz}{dx} = 0$ si la conduite est horizontal

j s'exprime en mètres de fluide par mètre de conduite

$$j = -\frac{1}{\rho g}\frac{dX}{dx} = -\frac{dh_T}{dx}$$

PERTE de CHARGE UNITAIRE

$$h_T = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\rho v^2}{2}$$

COEFFICIENTS de PERTE de CHARGE UNITAIRE :

Pour faciliter la comparaison entre les écoulements, on emploie un coefficient SANS DIMENSIONS, défini par :

$$\boxed{\Lambda = -\frac{dX}{dx}\,\frac{D}{\frac{\rho v^2}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{j = -\frac{1}{\rho g}\,\frac{dX}{dx} = \frac{\Lambda}{D}\,\frac{v^2}{2g}}$$

$\frac{\rho v^2}{2}$: PRESSION DYNAMIQUE (même dimension que X)

D : DIAMÈTRE de la CONDUITE (même dimension que x)

→ PERTE de CHARGE dans une <u>CONDUITE de LONGUEUR L</u> de DIAMÈTRE CONSTANT :

a) $J \equiv \xi_{12} = \Lambda \frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2g}$ (par UNITÉ de POIDS)

UNITÉS : $\frac{J}{N}$ ou m

PERTE de CHARGE PONDÉRALE

b) $w_f \equiv \xi_{12} = \Lambda \frac{L}{D}\,\frac{v^2}{2}$ (par UNITÉ de MASSE)

UNITÉS : $\frac{J}{kg}$

PERTE de CHARGE MASSIQUE

c) $\Delta X \equiv \xi_{12} = \Lambda \frac{L}{D}\,\frac{\rho v^2}{2}$ (par unité de VOLUME)

UNITÉS : Pa ou $\frac{J}{m^3}$

PERTE de CHARGE exprimée en unité de PRESSION

• GÉNÉRALISATION du THÉORÈME de BERNOULLI :

En utilisant l'expression en terme d'ÉNERGIE par UNITÉ de VOLUME :

$$\rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \underbrace{\sum c\frac{\rho v^2}{2} + \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho v^2}{2}}$$

ξ_{12} : PERTE de CHARGE TOTALE

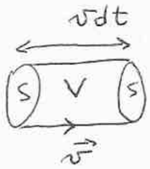
$\sum c\frac{\rho v^2}{2}$: SOMME des P.C. SINGULIÈRES

$\lambda\frac{L}{D}\frac{\rho v^2}{2}$: P.C. LINÉAIRE (VISCOSITÉ)

Entre deux point 1, 2 d'un écoulement en conduite de section constante et de longueur L.

→ PUISSANCE DISSIPÉE par les PERTES de CHARGE :

$$q_v = v \cdot S = \frac{dV}{dt}$$



DÉBIT VOLUMÉTRIQUE

TH. BERNOULLI : généralisé

$$\underbrace{\left(\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1\right)}_{\frac{E_1}{\Delta V}} - \underbrace{\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2\right)}_{\frac{E_2}{\Delta V}} = \xi_{12}$$

P.C.

en multipliant à gauche et à droite par q_v :

$$q_v\left(\frac{E_1}{\Delta V} - \frac{E_2}{\Delta V}\right) = q_v\,\xi_{12} \Rightarrow \boxed{P_f = \xi_{12}\cdot q_v}$$

PUISSANCE DISSIPÉE (mesurée en W)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow q_v\left(\frac{E_1 - E_2}{\Delta V}\right) = \frac{E_1 - E_2}{\Delta t}$$