Chaos et complexité en dynamique des fluides

la convection thermique et le système de Lorenz

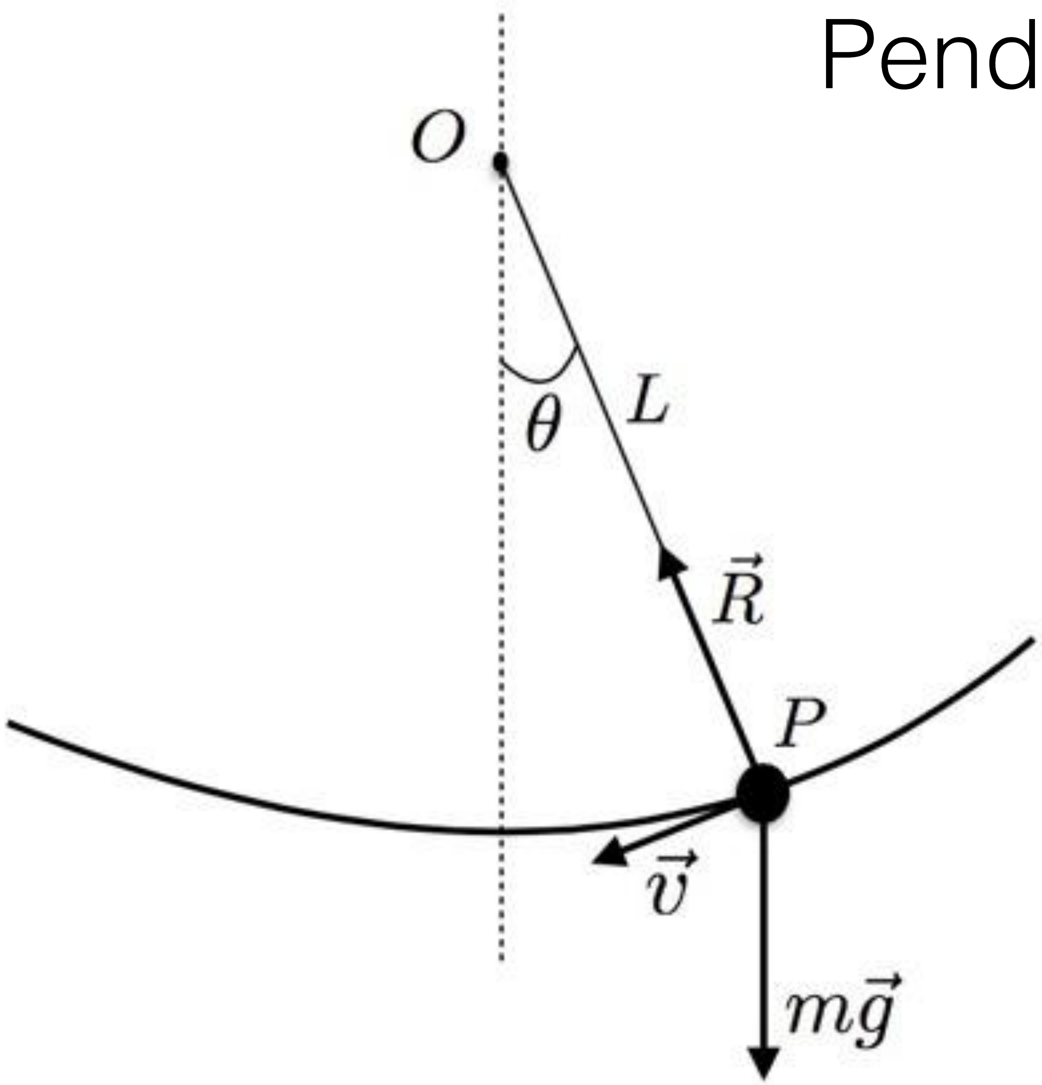
Stefano Berti - Laboratoire de Mécanique de Lille
stefano.berti@polytech-lille.fr
www.bertistefano.eu

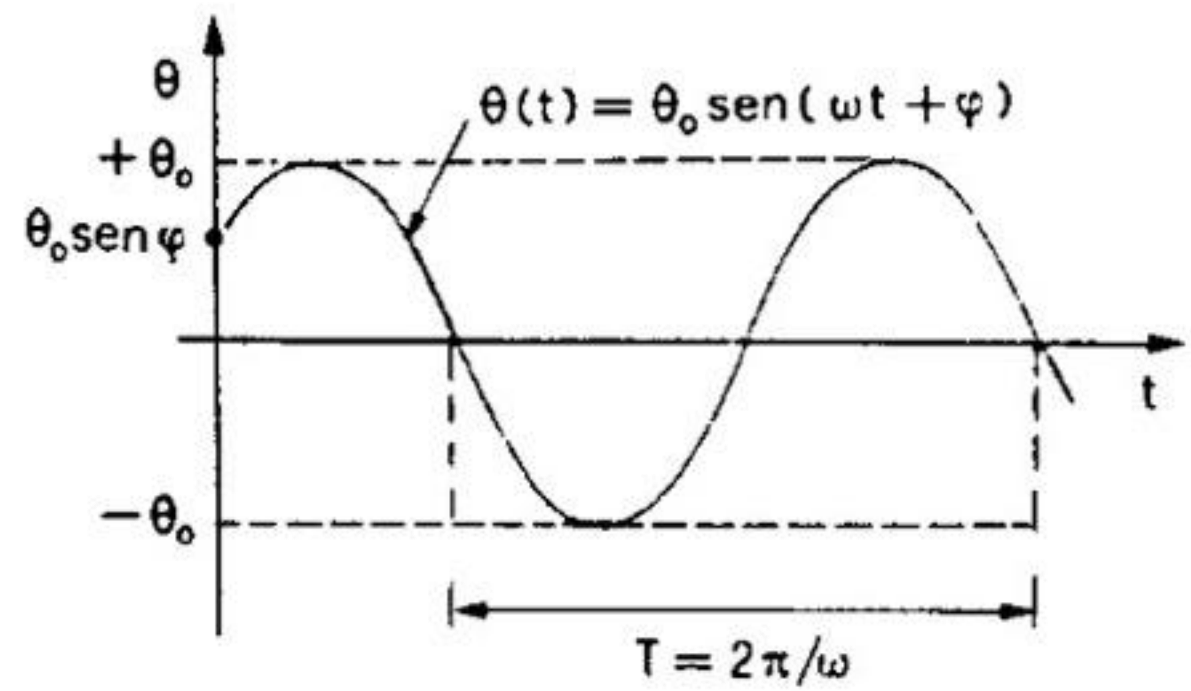
Mécanique

Mouvement d'un objet: description et causes (forces)

Mouvements réguliers (cas particuliers):

Pendule simple





$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

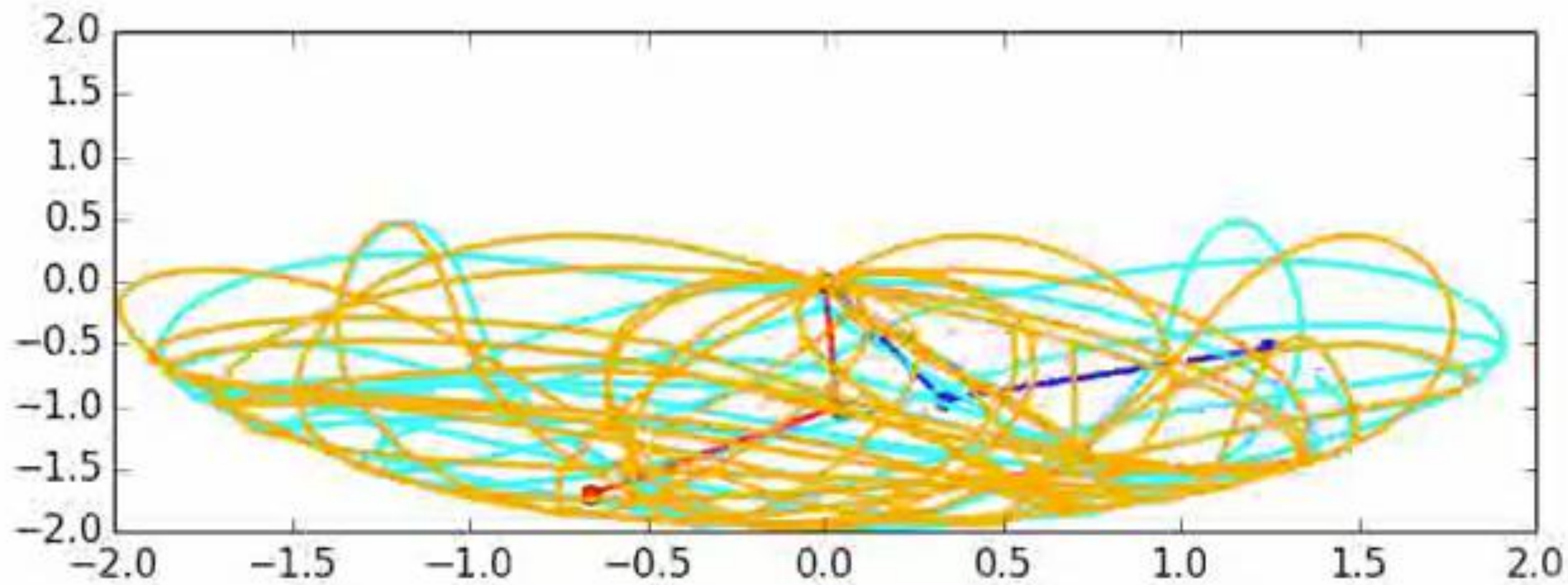
On est capable de calculer la solution et, donc,
de prévoir le comportement du système

Mouvements irréguliers:

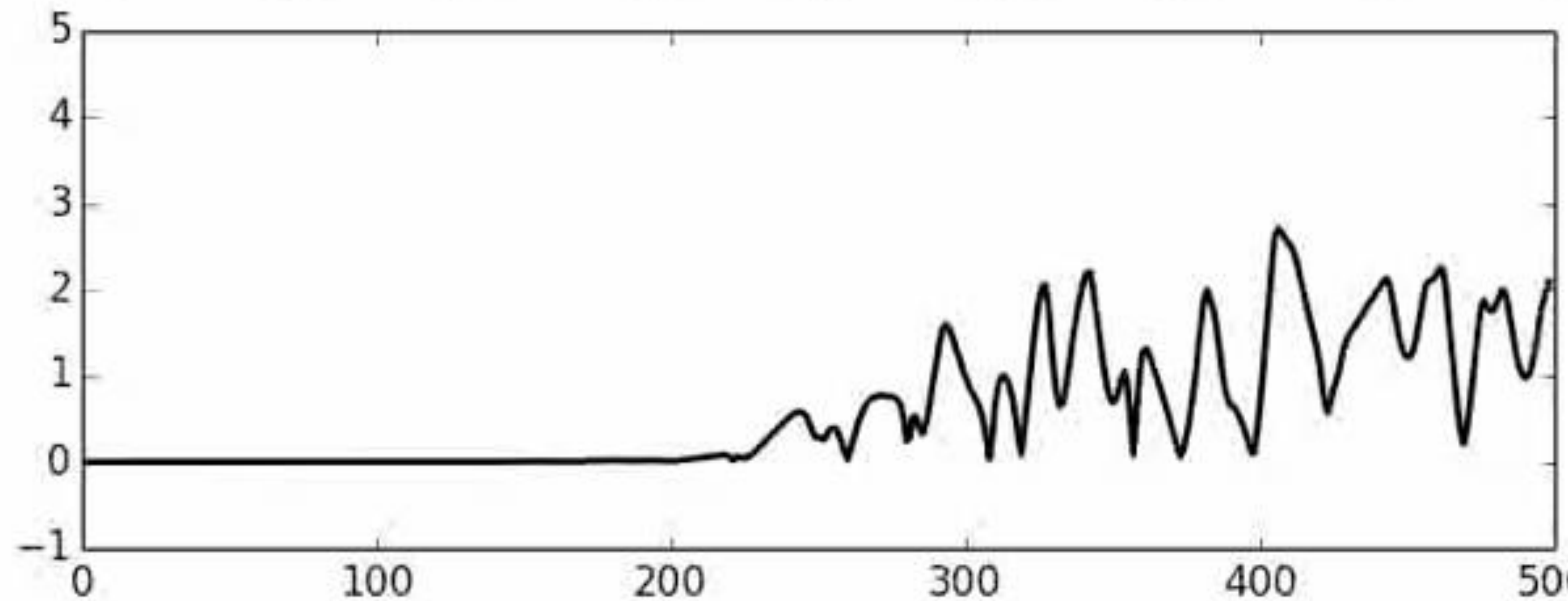
- Existent-ils des systèmes mécaniques donnant lieu à d’autres types de mouvements?
- Que peut-on dire de leur dynamique?
- Peut-on en prévoir le comportement?
- Sont-ils typiques?

Un système simple avec une dynamique complexe

mouvement de
2 pendules doubles



distance entre
les 2 pendules
au cours du temps



La dynamique de ce système est chaotique

Chaos deterministe

Histoire minimale

Henri Poincaré (1854-1912)
mathématiques, physique théorique, ingénierie, philosophie de la science

Découverte du chaos (1892-1899)

problème des 3 corps (terre-lune-soleil):
des petites perturbations de l'état initial du système peuvent
produire des conséquences dramatiques dans son évolution

Edward Lorenz (1917-2008)
mathématiques, météorologie

Renaissance du chaos (1963)

modèle simple de la dynamique de l'atmosphère
prévisions météorologiques et effet papillon
simulations numériques

Chaos deterministe

Un phénomène répandu (typique):

- Mécanique des solides (p.ex. vibrations)
- Mécanique des fluides (p.ex. turbulence, convection)
- Mécanique céleste (p.ex. stabilité du système solaire)
- Météorologie et océanographie
- Circuits électriques et électronique
- Chimie: cinétique des réactions
- Biologie: dynamique des populations
- …

Systèmes dynamiques chaotiques

Caractéristiques principales:

Non linéaires

Dans un système linéaire si on double la cause on obtient un effet deux fois plus grand. Dans un système non linéaire la relation entre cause et effet est plus compliquée.

Forte dépendance des conditions initiales

Une très petite erreur sur la connaissance de l'état initial du système va se trouver rapidement amplifiée.

Dynamique complexe

Comportement irrégulier au cours du temps.

Paramètre de contrôle

Le degré de chaoticité dépend de la valeur de ce paramètre.

Effet papillon: petite cause grande conséquence

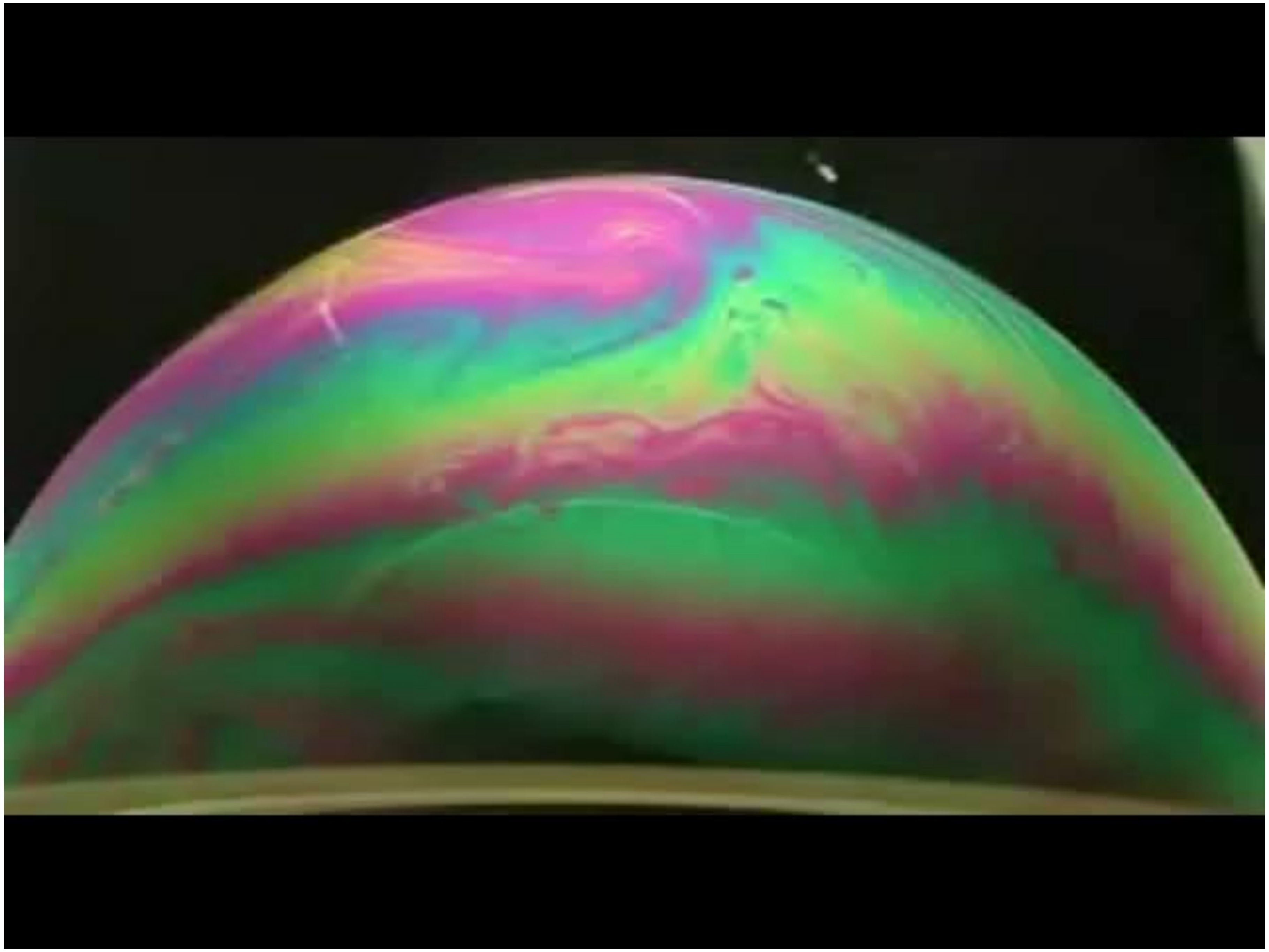
"Si le battement d'aile d'un papillon quelque part au Cambodge déclenche sur un autre continent le plus violent des orages…"

Dynamique chaotique dans les fluides

Un exemple dans la nature

The visualization covers the period June 2005 to December 2007 and is based on a synthesis of a numerical model with observational data, created by a NASA project called Estimating the Circulation and Climate of the Ocean, or ECCO for short. ECCO is a joint project between the Massachusetts Institute of Technology and NASA's Jet Propulsion Laboratory in Pasadena, Calif. ECCO uses advanced mathematical tools to combine observations with the MIT numerical ocean model to obtain realistic descriptions of how ocean circulation evolves over time.
These model-data syntheses are among the largest computations of their kind ever undertaken. They are made possible by high-end computing resources provided by NASA's Ames Research Center in Moffett Field, Calif.

Un exemple dans le laboratoire (ou à la maison)



Soap bubble submitted to temperature variations similar to those found between the equator and the pole

F. Seychelles, Y. Amarouchene, M. Besafi, H. Kellay, Phys. Rev. Lett. **100**, 144501 (2008)

Circulation atmosphérique

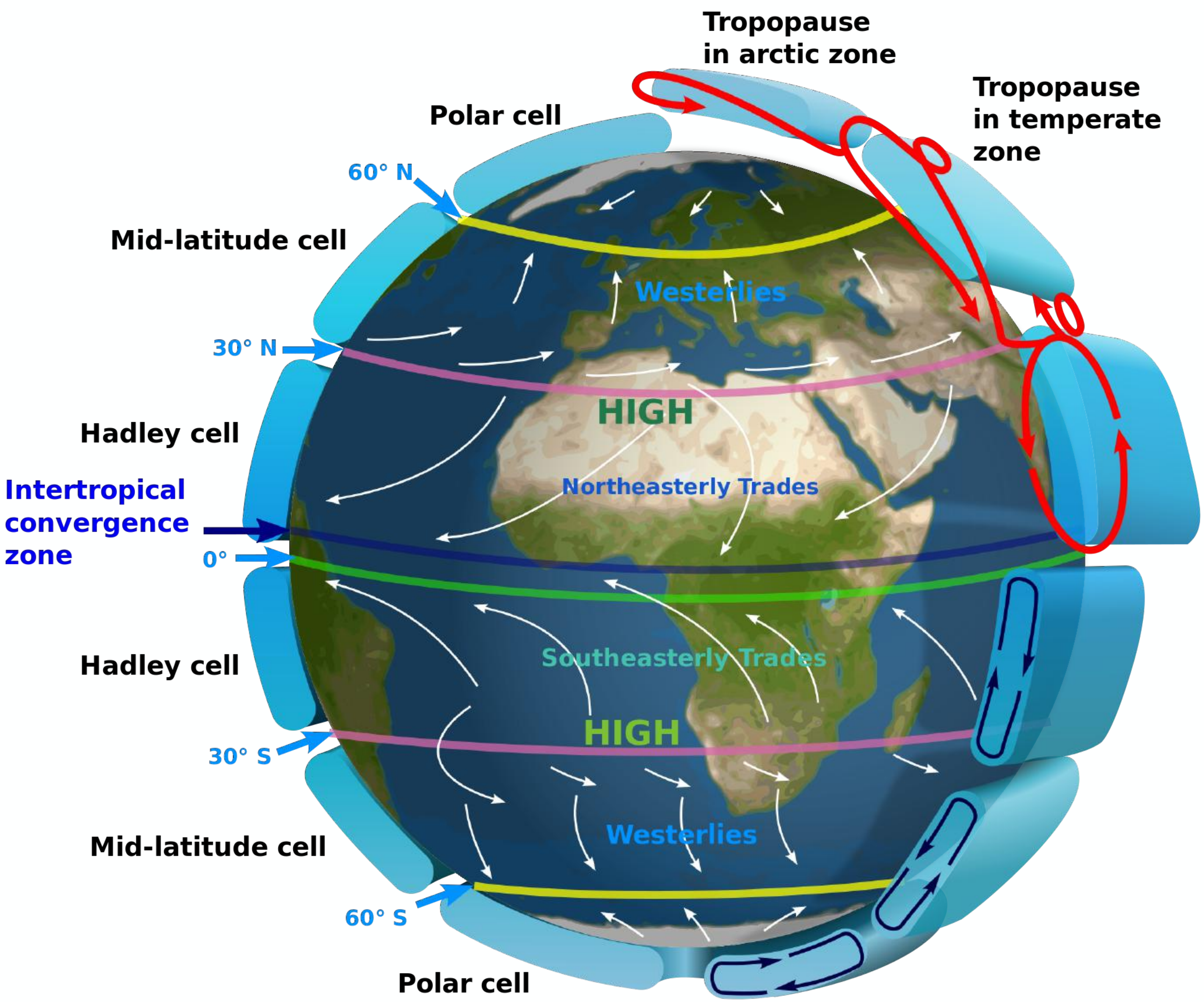


Schéma de la circulation atmosphérique globale (NASA).

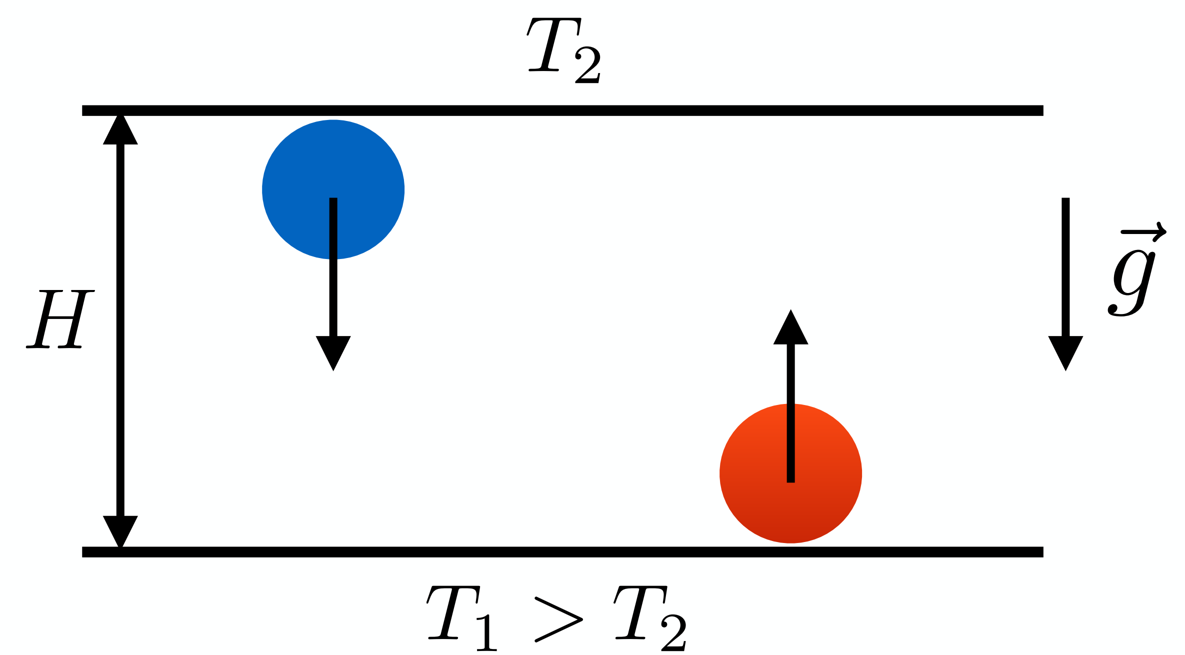
Convection thermique

Transfert de la chaleur dans un fluide

Conduction: pas de mouvement d'ensemble (processus lent)

Convection: mouvement collectif du fluide (processus plus rapide)

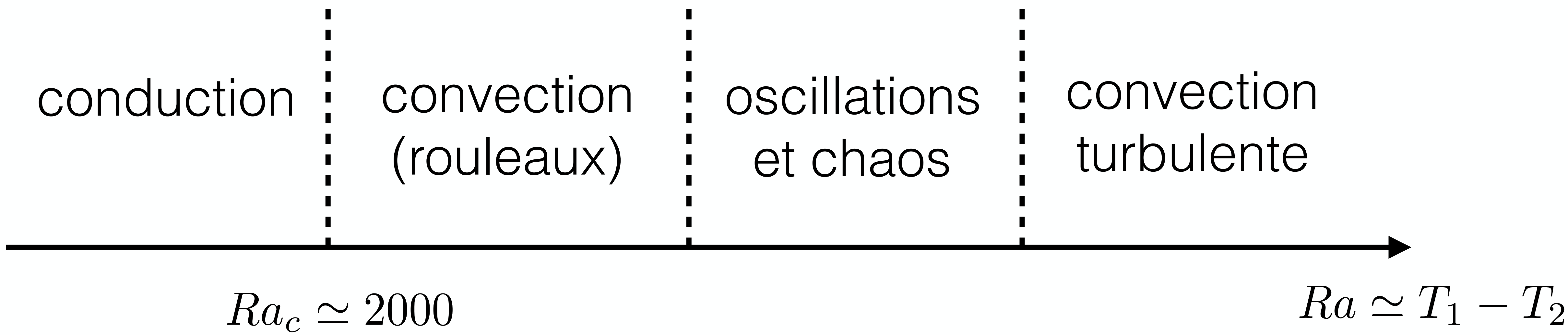
Cause physique:
poussée d'Archimède

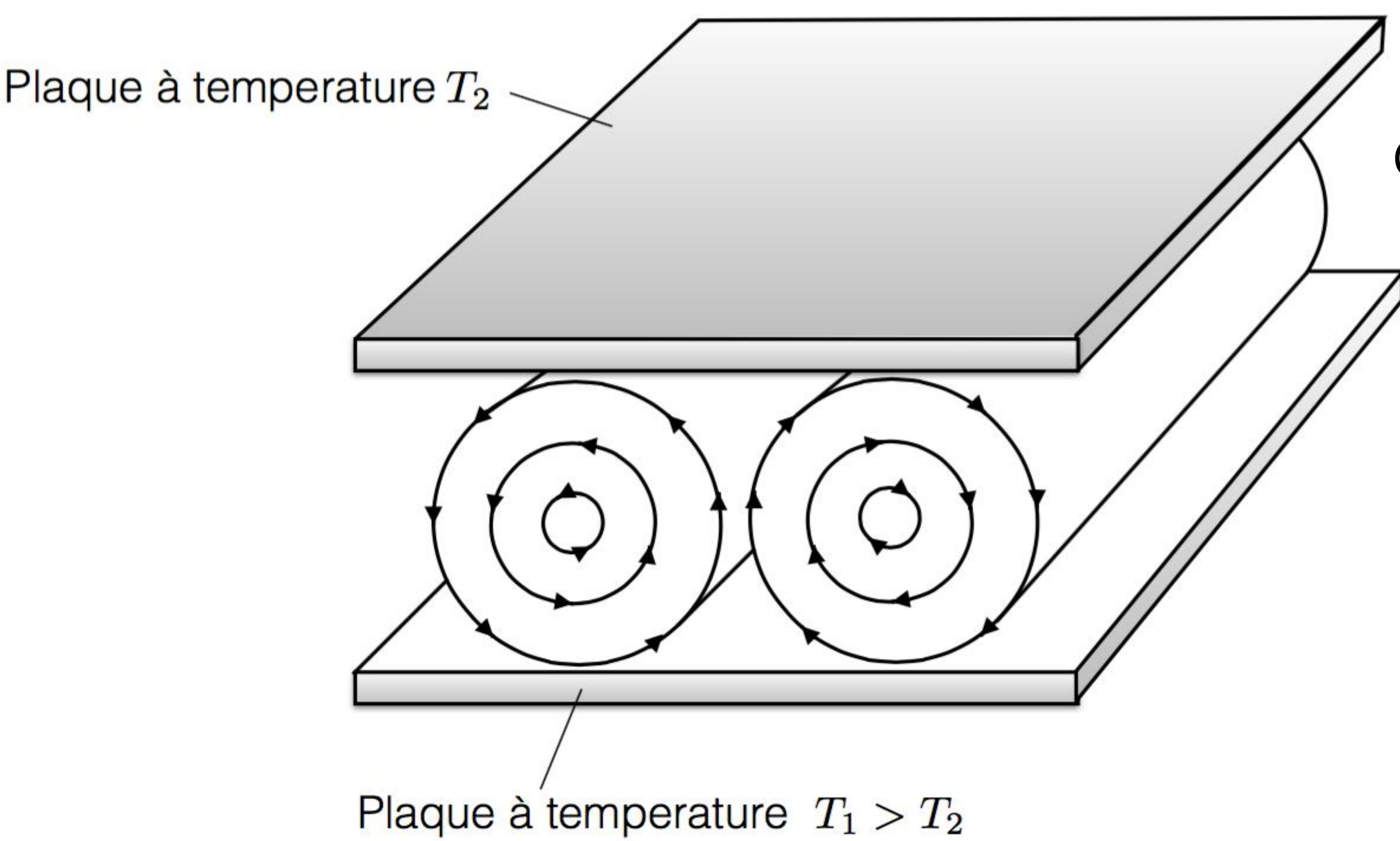


Paramètre de contrôle: nombre de Rayleigh

$$Ra \approx \frac{\text{transfert convectif}}{\text{transfert conductif}} \qquad Ra = \frac{\rho_0 g \alpha H^3 (T_1 - T_2)}{\kappa \nu}$$

Dans le laboratoire: le système de Rayleigh-Bénard





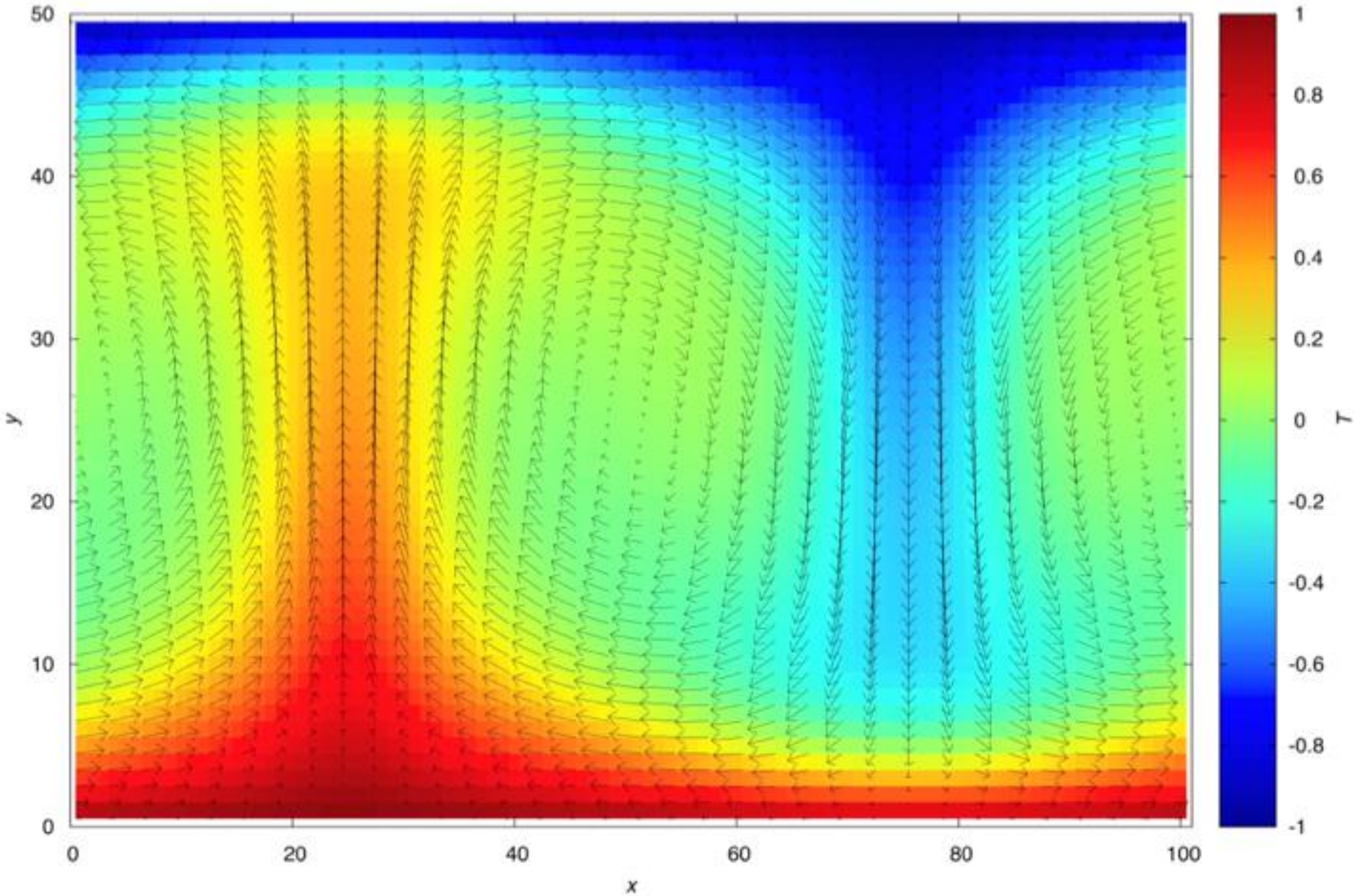
cellules de convection

Cellules de convection: une expérience maison

Expérience réalisée par Anselmo Pereira (doctorant LML)

Cellules de convection

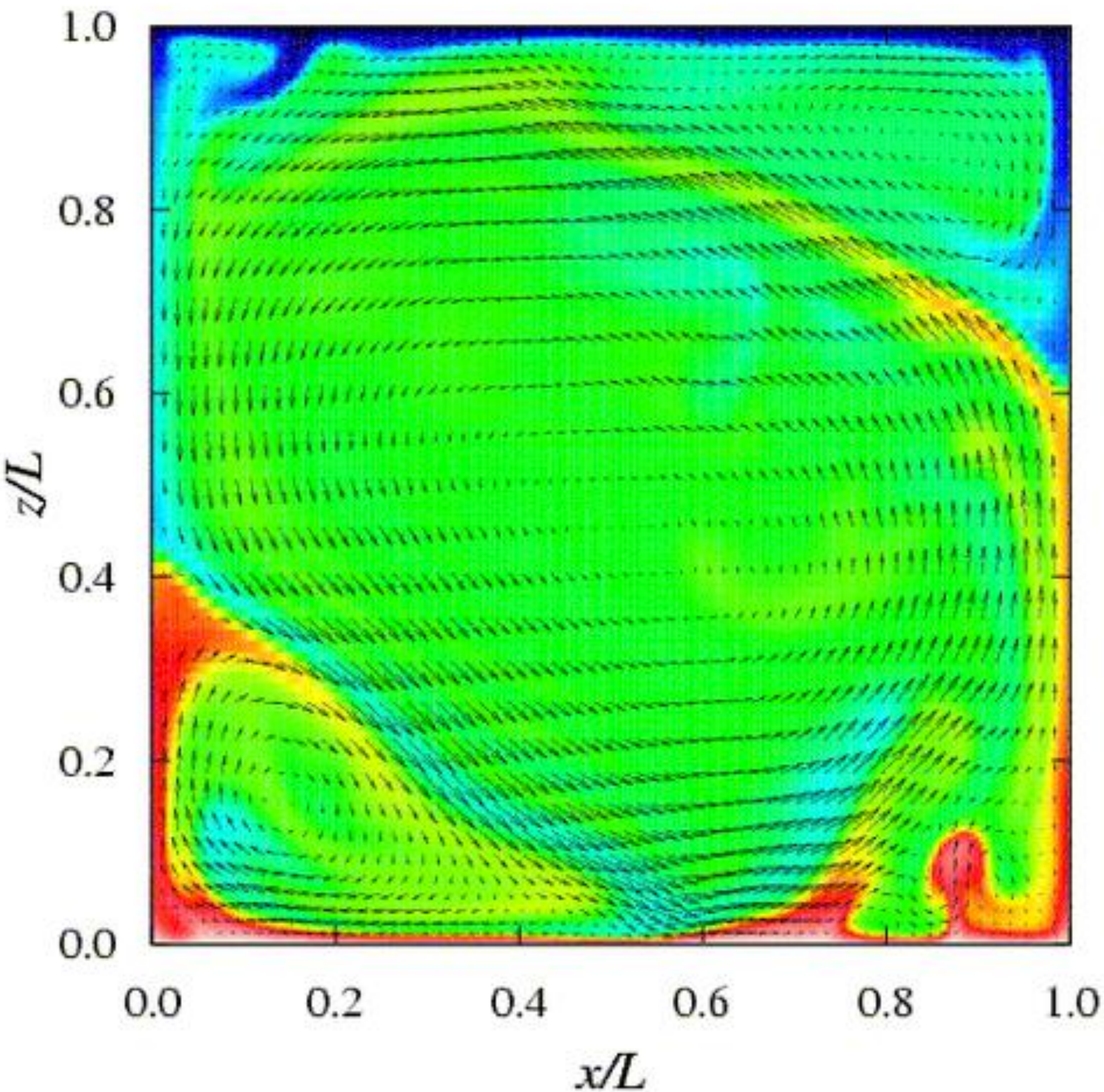
$Ra \gtrsim Ra_c$



Simulation numérique: Enrico Calzavarini (maitre de conf. LML)

Convection turbulente

$Ra \gg Ra_c$



T_2

$T_1 > T_2$

Simulation numérique: Enrico Calzavarini (maitre de conf. LML)

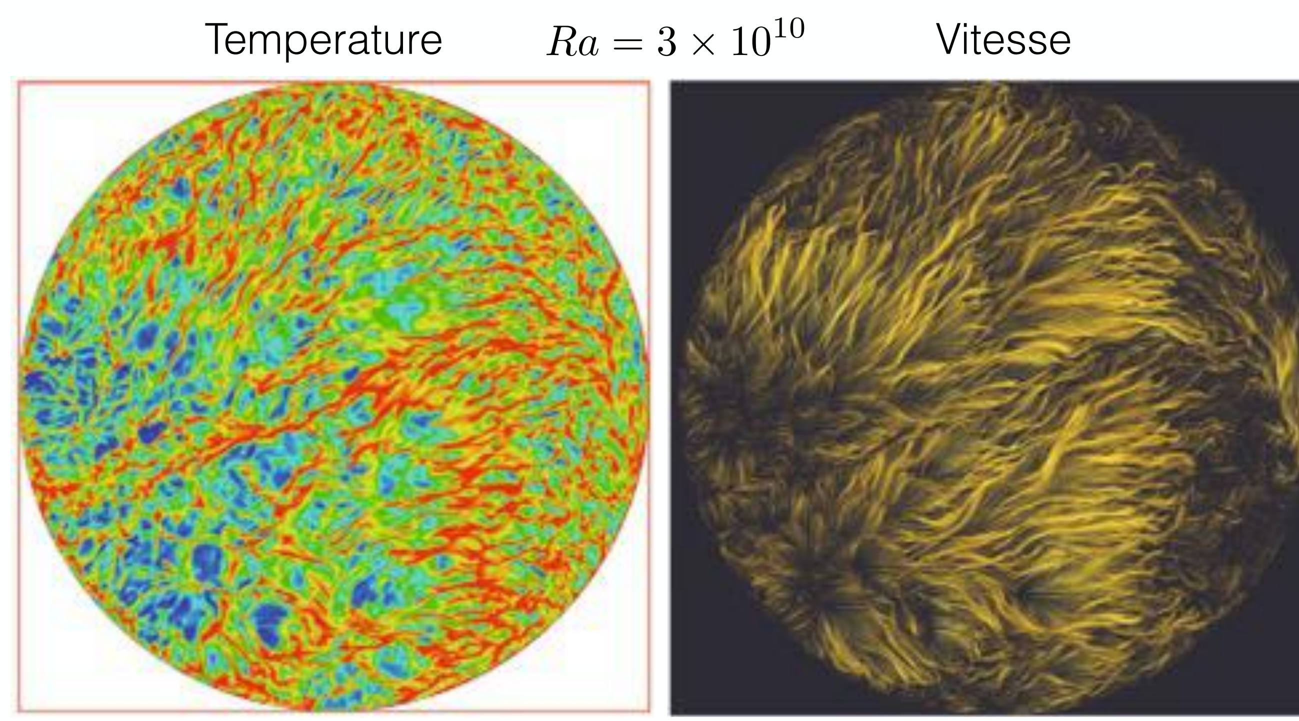
Convection thermique et simulations numériques

La **formulation mathématique** du problème de la convection thermique fait appel à des notions sophistiquées: équations (aux dérivées partielles) de l'hydrodynamique et de la thermodynamique.

La solution de ces équations est difficile. Les **simulations numériques** se révèlent un outil fondamental pour ce type d'études **mais la description détaillée du comportement du système et sa compréhension restent un défi**, même en utilisant des ordinateurs très puissants.

Superordinateur (ici 250000 processeurs)

Résultats numériques: convection turbulente 3D dans un cylindre et structures proches paroi



New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection, F. Chillà, J. Schumacher, EPJ E 35, 58 (2012)

Le système de Lorenz

Modèle réduit: simplification drastique de la dynamique. Seulement certaines caractéristiques essentielles sont retenues. Utile pour répondre à des questions spécifiques.

Modèle de Lorenz (1963) pour la convection dans l'atmosphère:

3 variables $\left\{ \begin{array}{l} x \longrightarrow \text{liée à la vitesse (du vent)} \\ y \\ z \end{array} \right.$ y, z → liées à la température (de l'air)

caractérisant un état du temps météorologique
et obéissant à 3 équations simples

3 paramètres $\left\{ \begin{array}{ll} r = Ra/Ra_c & \text{nombre de Rayleigh} \\ \sigma = \kappa/\nu & \text{diffusivité thermique / viscosité} \\ b & \text{lié à la géométrie} \end{array} \right.$

Caractère non linéaire du aux couplages entre temperature et vitesse (transport de la temperature).

Evolution en temps seulement, pas de structure spatiale.

Attracteur de Lorenz

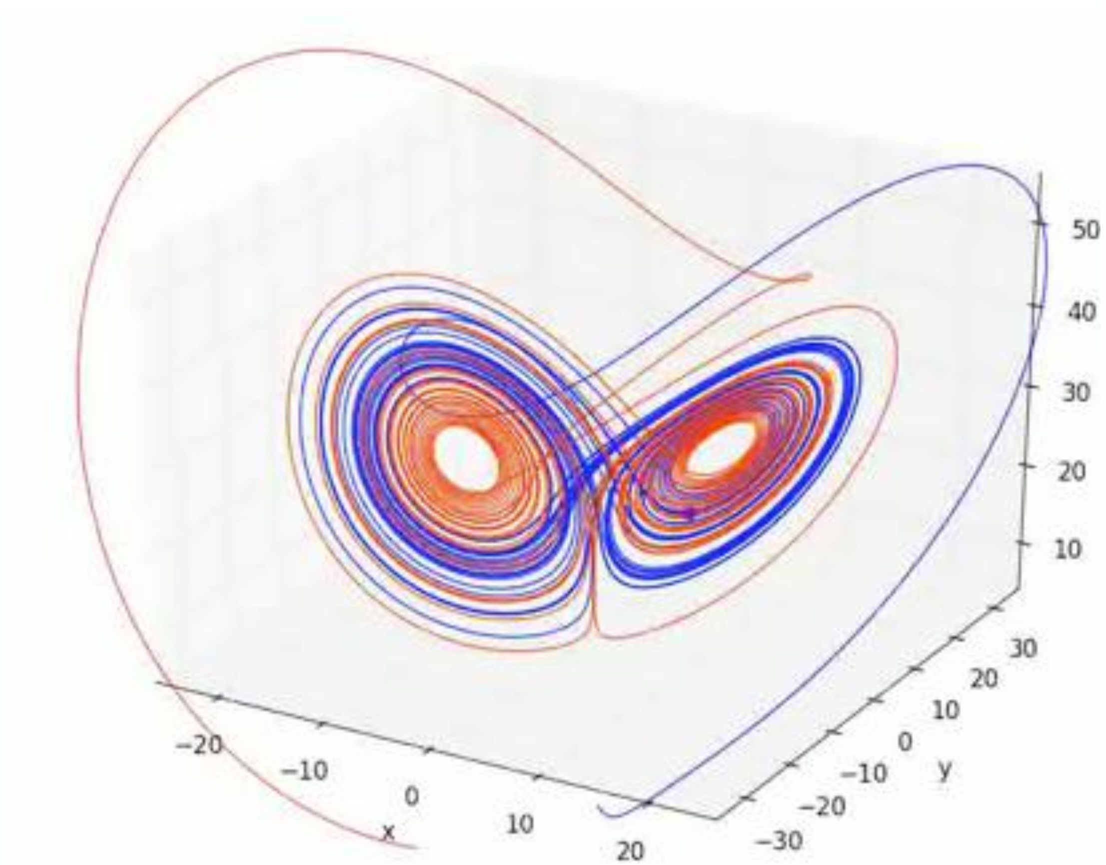
Le système de Lorenz reproduit la phénoménologie de la convection thermique:

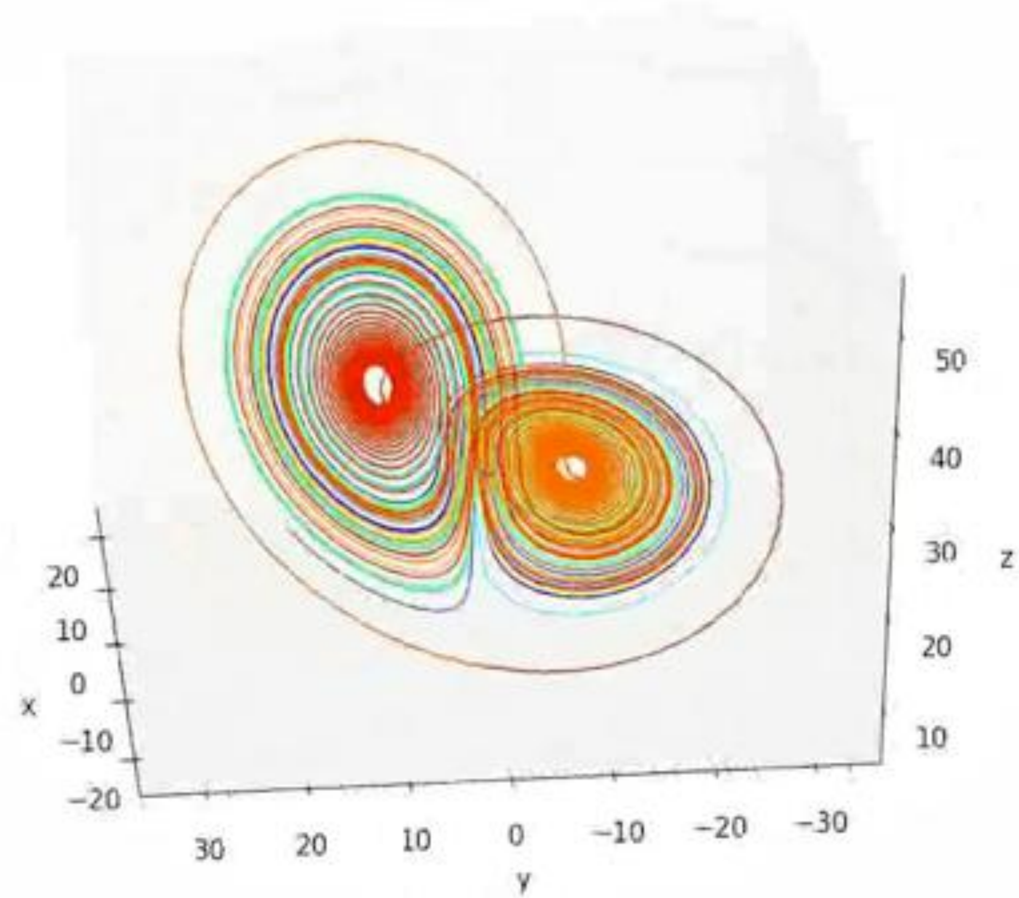
conduction pour $r < 1$

cellules de convection pour $1 < r < r_c \simeq 24,74$

comportement apériodique irrégulier (chaos) $r > r_c$

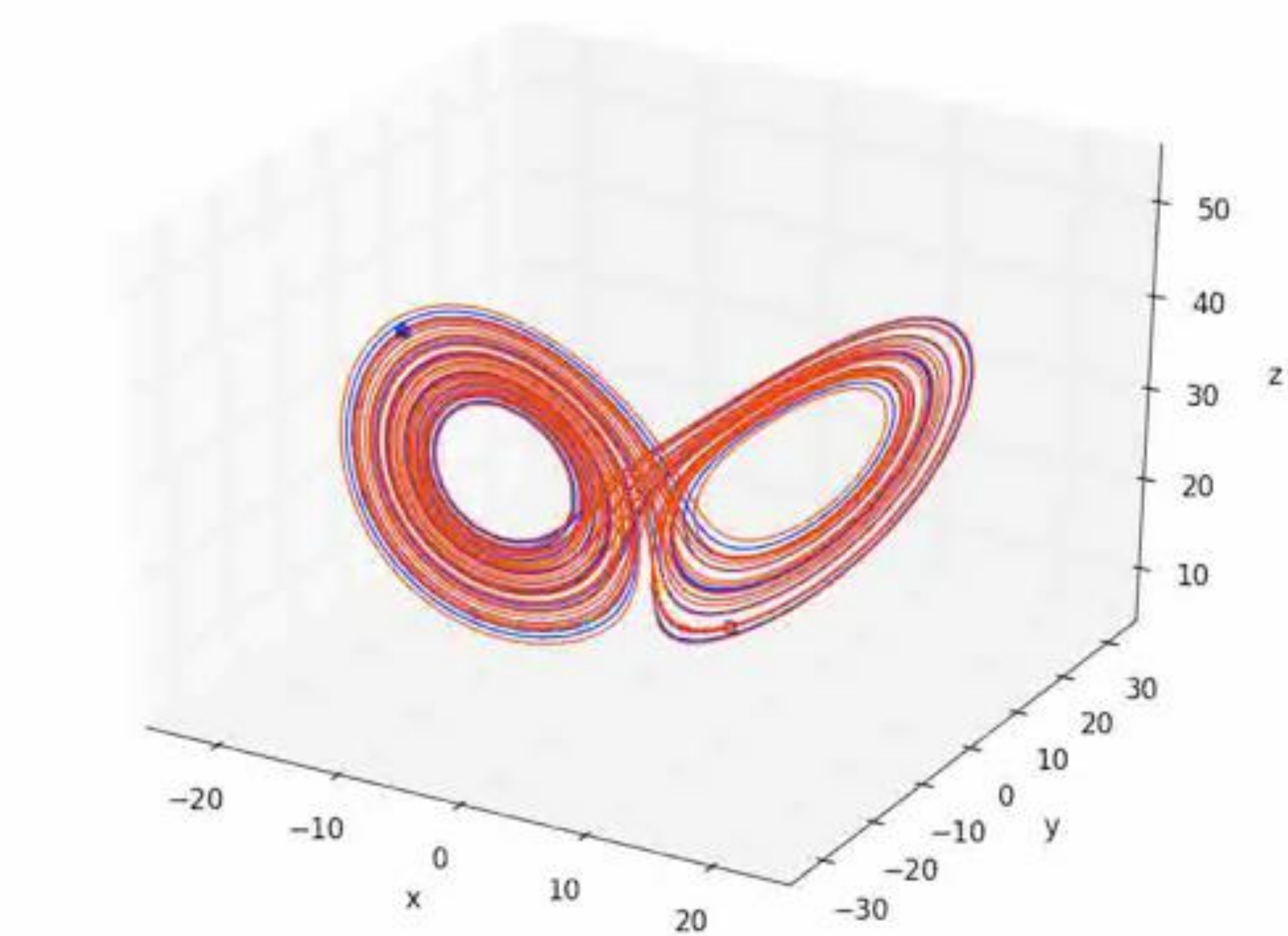
Evolution temporelle du système pour $r > r_c$ (régime chaotique)

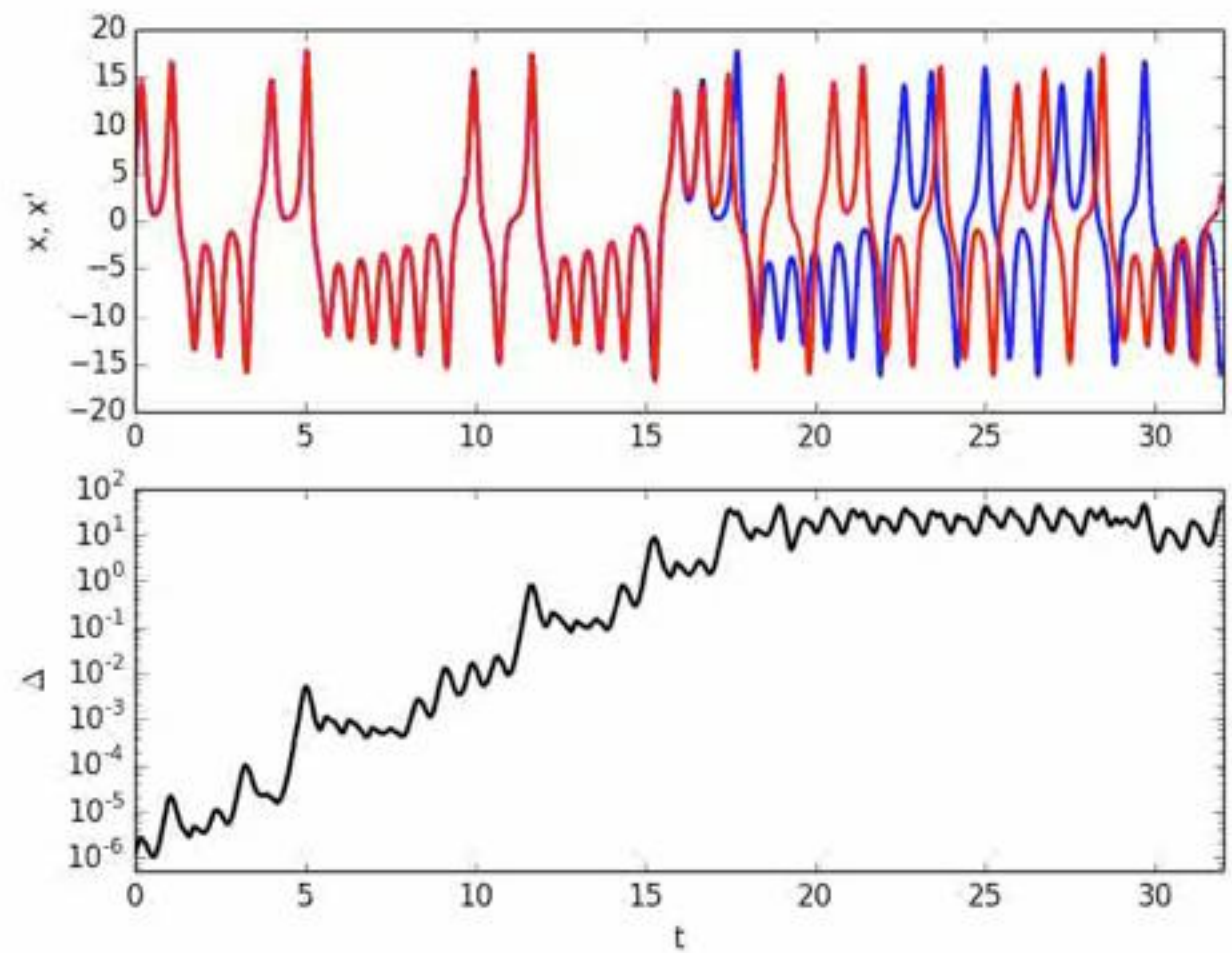




Indépendamment de l'état initiale, après un transitoire la dynamique se passe sur un ensemble géométrique complexe, appelé attracteur.

Effet papillon et prévisibilité





Dynamique de **2 points initialement très proches** (2 situations météo très similaires, avec de petites différences dues à l'incertitude expérimentale de l'état initial).

Amplification exponentielle (très rapide) de la différence initiale.
Après un temps fini les 2 prévisions seront très différentes.

C'est le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales

Effet papillon et prévisibilité

AMERICAN ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE, 139th MEETING

Subject............................Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?

Author.............................Edward N. Lorenz, Sc.D.
Professor of Meteorology

Address............................Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Mass. 02139

Time...............................10:00 a.m., December 29, 1972

Place..............................Sheraton Park Hotel, Wilmington Room

Program............................AAAS Section on Environmental Sciences
New Approaches to Global Weather: GARP
(The Global Atmospheric Research Program)

Convention Address.................Sheraton Park Hotel

RELEASE TIME
10:00 a.m., December 29

Lest I appear frivolous in even posing the title question, let alone suggesting that it might have an affirmative answer, let me try to place it in proper perspective by offering two propositions.

1. If a single flap of a butterfly's wings can be instrumental in generating a tornado, so also can all the previous and subsequent flaps of its wings, as can the flaps of the wings of millions of other butterflies, not to mention the activities of innumerable more powerful creatures, including our own species.

2. If the flap of a butterfly's wings can be instrumental in generating a tornado, it can equally well be instrumental in preventing a tornado.

Prévisibilité: peut le battement d'aile d'un papillon au Brésil déclencher une tornade au Texas?

Temps de prévisibilité

Si $t > t_*$ la différence $\delta(t) = |\vec{x}(t) - \vec{x}\,'(t)|$ est très grande, la prévision devient trop imprécise.

Le **temps de prévisibilité** est donné par $$t_* \simeq \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\delta_*}{\epsilon} \simeq \frac{c}{\lambda}$$

$\epsilon = \delta(0)$ Incertitude sur la condition initiale

δ_* Précision souhaitée pour la prévision

c Constante qui dépend faiblement de δ_* et ϵ

Pour augmenter de 10 fois le temps de prévisibilité il faudrait réduire l'erreur initial d'un facteur 1/10000 (dans un système linéaire il suffirait de la réduire de 1/10). Donc, même des grandes améliorations de la connaissance de l'état initial ont des effets limités sur la possibilité de prévoir le comportement du système aux temps longs.

La quantité important pour déterminer la **prévisibilité du système** est:

λ Caractéristique du système (état de l'atmosphère)
fonction des paramètres du système de Lorenz r, σ, b

$$t_* \approx \frac{1}{\lambda} \simeq 10$$ jours, pour l'atmosphère.

Conclusions

- Loin d'être une exception le comportement chaotique est plutôt typique dans la dynamique de systèmes physiques, biologiques, chimiques et en ingénierie.
- Même des systèmes très simples peuvent donner lieur a des dynamiques complexes.
- Le phénomène du chaos deterministe joue un rôle important en mécanique des fluides et ses application (p.ex. en météorologie).
- La prévisibilité des systèmes dynamiques chaotiques est limitée.
- Pour étudier ces systèmes il est nécessaire de concevoir des outils mathématiques appropriés (p.ex. approches statistiques, géométriques).
- Les simulations numériques ont permis la redécouverte du chaos et représentent un outil incontournable pour l'étudier.