TD2 : ALIMENTATION D'UNE TUYÈRE

PERTES de CHARGE

a) LINÉAIRES

$$\xi_{LIN} = \frac{1}{2}\rho U^2 \Lambda \frac{L}{D}$$ PERTE de CHARGE

$$\Lambda = \frac{\xi_{LIN}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \frac{D}{L}$$ COEFF. PERTE de CHARGE

U : VITESSE MOYENNE

D : DIAMÈTRE

b) SINGULIÈRES : liées à des singularités rencontrées par l'écoulement (p.ex. élargissement brusque).

$$\xi_{SING} = c\,\frac{1}{2}\rho v^2 \quad ; \; c = \text{const. qui dépend de la forme}$$

(Q1) $Q = 0{,}33 \ m^3/s$

$D = 0{,}5 \ m$ $\quad L = 400 \ m$

$\Lambda = 0{,}025$

$d = 0{,}25 \ m$

$\xi_{SING} = 8\,\frac{U^2}{2g}$ MESURÉE en MÈTRE $\left(\xi_{SING} \to \frac{\xi_{SING}}{\rho g}\right)$

$p_B = p_{atm} \to p_B = 0$ (référence)

CHARGE TOTALE en A : BERNOULLI

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = \cancel{p_B} + \cancel{\rho g z_B} + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \xi$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0} \qquad \overset{\shortparallel}{0} \qquad\qquad\qquad\qquad \% \ \rho g$$

$$H_A = H_B + \frac{\xi}{\rho g}$$ CHARGES MESURÉES en MÈTRES

$$\Delta H = \frac{\xi}{\rho g} \quad \Rightarrow \quad H_A = H_B + \frac{\xi}{\rho g}$$

$$\Delta H = H_A - H_B$$

$$H_A = \frac{p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2}{\rho g}$$

$$H_B = \frac{\frac{1}{2}\rho V_B^2}{\rho g}$$

$$\frac{\xi}{\rho g} = \frac{\xi_{LIN} + \xi_{SING}}{\rho g} = \frac{1}{\rho g}\left\{\frac{1}{2}\rho U^2 \lambda \frac{L}{D}\right\} + \frac{8U^2}{2g} =$$

$$= \frac{U^2}{2g}\lambda\frac{L}{D} + \frac{8U^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}\left(\lambda\frac{L}{D} + 8\right)$$

$$\Rightarrow H_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{\xi}{\rho g} = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{U^2}{2g}\left(\frac{\lambda L}{D} + 8\right)$$

CONSERVATION du DÉBIT:

$$q_v = \text{const} \Rightarrow \underbrace{A_e V_e}_{\text{entrée}} = \underbrace{A_s V_s}_{\text{sortie}} \Rightarrow V_s = \frac{A_e}{A_s} V_e \Rightarrow$$

$$V_s = V_B;\ V_e = U$$

$$A_e = \frac{\pi}{4} D^2;\ A_s = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\Rightarrow V_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 U \quad \rightarrow$$

$$\Rightarrow H_A = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 + \left(\frac{\lambda L}{D} + 8\right)\right] = \frac{U^2}{2g}\left[16 + 28\right] = \frac{U^2}{2g} 44 \simeq$$

$$U = \frac{q_v}{A_e} = \frac{q_v}{\frac{\pi D^2}{4}} \simeq 2\,m/s$$

$$\simeq 0{,}2 \cdot 44 = 8{,}8\ m$$

$$g \simeq 10\ m/s^2$$

$$\frac{D}{d} = 2$$

$$\lambda = 0{,}025$$

$$L = 400$$

$$D = 0{,}5$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{H_A = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 + \left(\frac{\lambda L}{D} + 8\right)\right] \simeq 8,8 \text{ m}}$$

(Q2) HAUTEUR au-dessus de A $\Leftrightarrow$ HAUTEUR de la SURFACE LIBRE (SL)
(Mésurée à partir de la réf. $z = 0$)

BERNOULLI (entre SL et A) :

$$\underset{0}{\cancel{p_{SL}}} + \rho g z_{SL} = p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$p_{SL} = p_{atm} = 0$

$v_{SL} = 0$ car RESERVOIR

$$\Rightarrow z_{SL} = \frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{U^2}{2g} = H_A \quad \Rightarrow \quad z_{SL} = H_A = 8,8 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ HAUTEUR de SL par rapport au point A :

$$h = z_{SL} - \underset{(*)_1}{z_A} = z_{SL} - \underset{\text{PENTE}}{a}\cdot L = 8,8 \text{ m} - \underbrace{\frac{0,3}{100}\cdot 400 \text{ m}}_{1,2 \text{ m}} = 7,6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = z_{SL} - a\cdot L = 7,6 \text{ m}}$$

(Q3) ON JOUE sur la GÉOMÉTRIE

POUR AUGMENTER le DÉBIT : $q_v' = 0{,}5 \frac{m^3}{s}$ → Quel devrait être le DIAMÈTRE D' pour que H_A reste $= 8{,}8$ m ?

DÉBIT : $q_v = AV \Rightarrow q_v' = \frac{\pi}{4} D'^2 U' \Rightarrow U' = \frac{q_v'}{\frac{\pi}{4} D'^2} = \frac{2}{\pi D'^2}$

BERNOULLI / ρg :

$$\frac{P_A'}{\rho g} + z_A + \frac{1}{2g} U'^2 = \frac{1}{2g} V_B'^2 + \frac{\xi'}{\rho g}$$

La charge en A ne change pas (MÊME CHÂTEAU D'EAU)

$$H_A = H_B' + \frac{\xi'}{\rho g}$$

$$\Delta H' = \frac{\xi'}{\rho g} \quad ; \quad \Delta H' = H_A - H_B'$$

(1) $\Delta H' = H_A - H_B' = 8{,}8 - \frac{1}{2g}(V_B')^2 =$ ← $V_B' = \frac{q_v'}{A_S} = \frac{q_v'}{\frac{\pi}{4} d^2}$

$$= 8{,}8 - \frac{1}{2g}\left(\frac{0{,}5}{\frac{\pi}{4} 0{,}25^2}\right)^2 =$$

$$= 8{,}8 - 5{,}28 = 3{,}512 \text{ m}$$

(2) $\Delta H' = \frac{\xi'}{\rho g} = \frac{U'^2}{2g}\left(\frac{\lambda L}{D'} + 8\right) =$ ← $U' = \frac{q_v}{A_e'} = \frac{q_v}{\frac{\pi}{4} D'^2} = \frac{2}{\pi D'^2}$

$g \simeq 10$ m/s²

$$= \left(\frac{2}{\pi D'^2}\right)^2 \frac{1}{2g}\left(\frac{10}{D'} + 8\right) = \frac{0{,}02}{D'^4}\left[\frac{10}{D'} + 8\right]$$

(1) et (2) $\Rightarrow 3{,}512 = \frac{0{,}02}{D'^4}\left[\frac{10}{D'} + 8\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3{,}512\, D'^5 - 0{,}16\, D' - 0{,}2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{D' \simeq 0{,}61 \text{ m}}$ RÉSOLUTION GRAPHIQUE

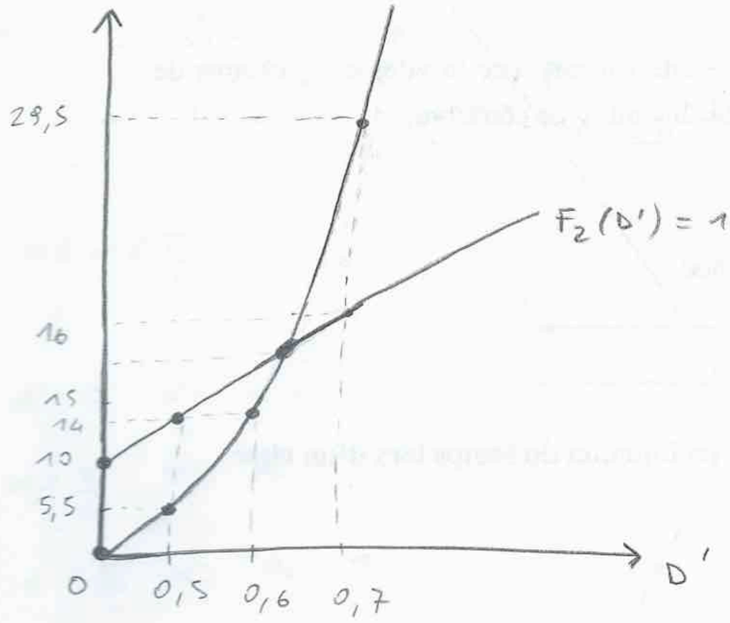
$$\Delta H = \frac{\xi'}{2g} = \frac{U'^2}{2g}\left[\lambda \frac{L}{D'} + 8\right]$$

$$\downarrow$$

$$3{,}512 = \frac{0{,}02}{D'^4}\left[\frac{10}{D'} + 8\right] \rightarrow \text{RÉSOLUTION GRAPHIQUE}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{3{,}512}{0{,}02}}_{=175{,}6} D'^4 = \frac{10 + 8D'}{D'} \Rightarrow \boxed{\underbrace{175{,}6\, D'^5}_{F_1(D')} = \underbrace{10 + 8D'}_{F_2(D')}}$$



$D' = 0 \Rightarrow F_1 = 0 \; ; \; F_2 = 10$

$D' = 0{,}5 \Rightarrow F_1 \simeq 5{,}5 \; ; \; F_2 = 14$

$D' = 0{,}6 \Rightarrow F_1 \simeq 13{,}7 \simeq 14 \; ; \; F_2 = 14{,}8 \simeq 15$

$D' = 0{,}7 \Rightarrow F_1 \simeq 29{,}5 \; ; \; F_2 \simeq 15{,}6 \simeq 16$

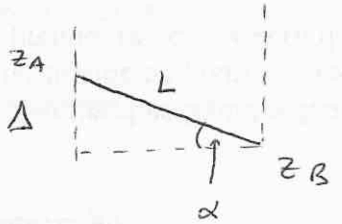
$\boxed{D' = 0{,}61\ m} \Rightarrow F_1 = 14{,}83 \; ; \; F_2 = 14{,}88$

(*)1 CALCUL de $h = z_{SL} - z_A$

$L = 400$ m

il faut connaître z_A

$\Delta = z_A - z_B$



$\Delta = L \sin\alpha$

$\boxed{a = \sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\Delta = L \cdot a}$; J'appelle a : PENTE

$a = 0,3\,\% = \frac{0,3}{100} \Rightarrow$

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta = L \cdot a = 400 \cdot \frac{0,3}{100}$ m $=$

$= 1,2$ m

$\alpha = 0 \Rightarrow a = 0$ (HORIZ.)

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = 1$ (VERT.)

La vraie PENTE TOPOGRAPHIQUE, p. ex. celle des ROUTES, est définie différemment :

$\alpha =$ ANGLE INCLINAISON

$m = \tan\alpha$

$C = 100 \cdot m = 100 \cdot \tan\alpha$ ce n'est pas une fonction linéaire de a.

PENTE exprimée en %

$C = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (HORIZ.)

$C = 100 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

Pour $\alpha = \pi/2$ on n'a pas une valeur définie : $\tan\alpha \to \infty$

Si on veut utiliser cette définition de pente dans notre cas :

$$\Delta = L \sin \alpha$$

$$\alpha = \arctan m = \arctan\left(\frac{c}{100}\right) = \arctan\left(\frac{0{,}3}{100}\right) \simeq 0{,}003 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \Delta = L \sin \alpha = 400 \cdot \sin(0{,}003) \simeq 1{,}2 \text{ m}$$

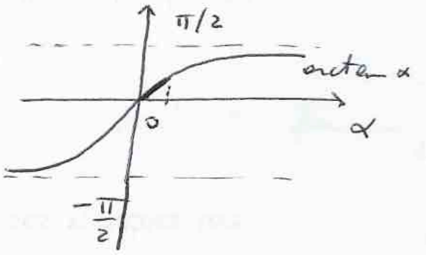
Donc, on obtient à peu près la même chose.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\alpha \simeq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \sin \alpha \simeq \alpha \\ \cos \alpha \simeq 1 \end{array} \Rightarrow \tan \alpha \simeq \alpha \Rightarrow \arctan \alpha \simeq \alpha$

et

$$\boxed{\tan \alpha \simeq \sin \alpha}$$



$c = 100 \cdot m = 100 \cdot \tan \alpha \simeq 100 \cdot \alpha = 100 \cdot \sin \alpha =$

$\sin \alpha = a$, avec ma définition.

$= 100 \cdot a$

$c = 0{,}3$ (en %)

$a = 0{,}3$ %

$\Rightarrow$ Les 2 définitions donnent la <u>même chose</u> pour $\alpha \simeq 0$

$$\underset{c}{\underset{\uparrow}{0{,}3}} = 100 \cdot \underset{\uparrow}{\frac{0{,}3}{100}} \Rightarrow \text{ok!}$$