

# TD n°1 : Etude de l'écoulement laminaire dans un tube cylindrique horizontal de section circulaire constante

**Durée : 2 heures**

## Hypothèses

Soit un tuyau cylindrique horizontal, siège d'un écoulement permanent, symétrique par rapport à l'axe  $X'X$  du tuyau. Nous supposons que cet écoulement a lieu par couches cylindriques coaxiales, toutes les vitesses étant parallèles à  $X'X$  (écoulement laminaire). Soit  $\vec{u} = (u, v, w)$  le vecteur vitesse. La vitesse  $u$  en un point dépend uniquement de sa distance  $r$  à l'axe. Les composantes  $v$  et  $w$  sont nulles. On a :

$$\frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

La vitesse  $u$  d'une particule reste constante et les trajectoires sont rectilignes. Les accélérations sont donc nulles.

Si les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur, on peut admettre que la pression est constante dans une section droite du tuyau.

## 1 Équilibre d'un cylindre élémentaire

Nous nous proposons, d'abord, d'étudier l'équilibre longitudinal d'un élément cylindrique centré sur l'axe, de rayon  $r$  et de longueur  $dx$  (Fig. 1).

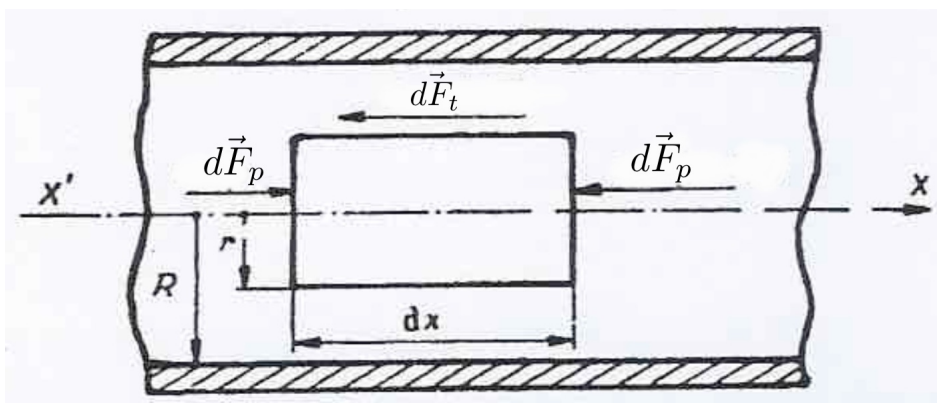


FIGURE 1 – Cylindre élémentaire, soumis aux forces de pression,  $d\vec{F}_p$ , et de viscosité,  $d\vec{F}_t$ .

Q1) Identifier les forces ayant une composante sur  $X'X$ .

Q2) En posant  $\tau = \frac{dF_t}{dS}$  (contrainte tangentielle dans le fluide visqueux), où  $dS$  est une surface élémentaire, écrire l'équation satisfaite, à l'équilibre, par les forces en jeu le long de l'axe horizontal  $X'X$ .

Q3) À partir de l'équation précédente, calculer la contrainte  $\tau$ .

Q4) Dans quelle partie du tube la contrainte est maximale ?

Q5) Quel est le signe du gradient de pression  $\frac{dp}{dx}$  ? Pourquoi ?

## 2 Répartition des vitesses

Q6) En utilisant la définition de la viscosité dynamique (formule de Newton), calculer le gradient radial de vitesse  $\frac{du}{dr}$ .

Q7) En utilisant l'expression de  $\tau$  trouvée à la question Q3, calculer l'expression de la vitesse  $u = u(r)$ .

## 3 Calcul du débit volumétrique. Formule de Poiseuille

Q8) Calculer le débit volumétrique dans un anneau élémentaire d'épaisseur  $dr$  et de rayon  $r$ .

Q9) Calculer le débit volumétrique pour l'ensemble du tuyau. Exprimer le débit en fonction du diamètre du tube.

Q10) Déterminer la vitesse moyenne du fluide.

## 4 Application : circuit de graissage

Q11) Un circuit de graissage est équivalent à un tuyau horizontal de longueur 3 m et de diamètre 5 mm. Il est alimenté à une extrémité sous une pression effective de 3 bar avec une huile de viscosité dynamique  $\eta = 0.26$  poise. Calculer le débit volumétrique, la vitesse moyenne et la vitesse maximale.