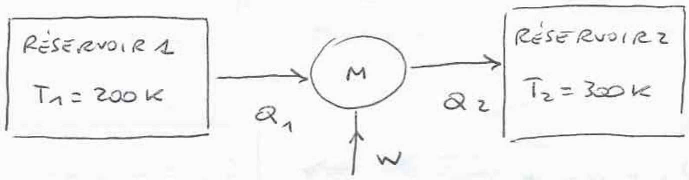
TD5

• **EX1** : CYCLE INVERSE



RÉSERVOIRS 1, 2 GRANDS $\Rightarrow T_1, T_2 =$ cst.

M : MACHINE FRIGORIFIQUE (pour retirer $Q_1 = 100\,J$ de chaleur du réservoir 1)
Elle consomme du travail W et rejette une quantité de chaleur Q_2 au réservoir 2.

→ QUESTIONS :

(a) $\Delta S_M = 0$ POURQUOI ?

(b) $Q_2 = Q_2(Q_1, W)$ à travers le 1er PRINCIPE ?

(c) $\Delta S_{TOT} = ?$

$W_{MIN} = ?$

(a) VARIATION D'ENTROPIE

SOURCE CHAUDE (C) [RÉSERVOIR 2] : ΔS_C
" FROIDE (F) [" 1] : ΔS_F
MACHINE (M) : ΔS_M

$\Delta S_M = 0$; l'entropie est une FONCTION D'ÉTAT $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ SUR UN CYCLE : $\boxed{\Delta S_M = 0}$

(b) $Q_2 = Q_2(Q_1, W) = ?$

1er PRINCIPE : $\Delta U = Q + W$

$\Delta U = 0$ (CYCLE) $\Rightarrow Q + W = 0$

CHALEUR TRAVAIL

La machine cède de la chaleur au réservoir 2

$Q_2 = Q_C < 0$

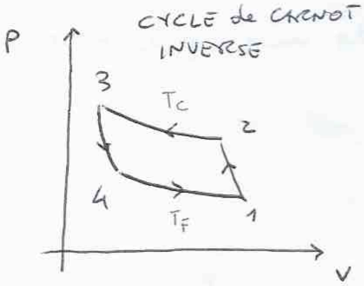
$Q_1 = Q_F > 0$ La machine reçoit de la chaleur du réservoir 1

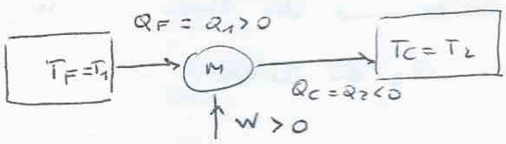
$W > 0$ La machine reçoit du travail de l'extérieur

$Q_1 + Q_2 + W = 0 \Rightarrow \boxed{Q_2 = -Q_1 - W}$

(c) $T_F = T_1 < T_2 = T_C$

CYCLE de CARNOT INVERSE





De la chaleur est transférée de la source froide vers la source chaude. Ce n'est pas un transfert spontané que le second principe interdit, le système consomme du travail W qui est transformé en chaleur durant le cycle et restitué tout comme Q_F à la source chaude. C'est le principe de la machine frigorifique qui prend de la chaleur dans la chambre froide et la restitue à l'extérieur où la température est plus élevée.

CÉDÉE REÇUE

CYCLE CARNOT : $\dfrac{Q_F}{Q_C} = -\dfrac{T_F}{T_C}$; $Q_F < 0$, $Q_C > 0$

" INVERSE : $\dfrac{Q_F}{Q_C} = -\dfrac{T_F}{T_C}$ car les 2 quantités de chaleur ont seulement changé de signe par rapport au cycle directe.

$Q_C < 0$, $Q_F > 0$

CÉDÉE par la machine

REÇUE par la machine

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_C + \Delta S_F + \Delta S_M$$

VARIATION TOTALE D'ENTROPIE

SOURCE CHAUDE (RÉS. 2)

SOURCE FROIDE (RÉS. 1)

MACHINE (gaz contenu dedans)

$$\Delta S_C = -\frac{Q_C}{T_C} > 0 \ , \quad \text{car} \quad Q_C < 0$$

la SOURCE C. REÇOIT de la CHALEUR

(la MACHINE CÈDE de la CHALEUR: $Q_C < 0$)

$Q_C = Q_2$

$T_C = T_2$

$$\Rightarrow \Delta S_C = -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Delta S_F = -\frac{Q_F}{T_F} < 0 \ , \quad \text{car} \quad Q_F > 0$$

la SOURCE F. CÈDE de la CHALEUR

(la MACHINE REÇOIT de la CHALEUR: $Q_F > 0$)

$Q_F = Q_1$

$T_F = T_1$

$$\Rightarrow \Delta S_F = -\frac{Q_1}{T_1}$$

$\Delta S_M = 0$ car la MACHINE fait un CYCLE

$$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{TOT} = \Delta S_C + \Delta S_F = -\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}}$$

$$W = -Q_1 - Q_2 \qquad (\Delta U = 0, \text{ CYCLE})$$

$$\Delta S_{TOT} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

et $W = W_{min}$

REV. $\Rightarrow \Delta S_{TOT} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$

IRR. $\rightarrow \Delta S_{TOT} > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} < -\frac{T_2}{T_1}$$

$$W = -Q_1\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) \quad ; \quad W \geqslant -Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Pour $\Delta S_{TOT} = 0$ (REVERSIBLE) $\Rightarrow W \rightarrow W_{MIN} = -Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = Q_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$

$$\boxed{W_{MIN} = Q_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)}$$ TRAVAIL MINIMUM

//

$$W > 0 \quad ; \quad W = \underset{\substack{\uparrow \\ <0 \\ (Q_1>0)}}{-Q_1}\left(1 + \underset{\substack{\uparrow \\ <0 \\ (Q_2<0)}}{\frac{Q_2}{Q_1}}\right) = -Q_1\Bigg(\overbrace{\underbrace{1 - \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|}_{\leqslant\, 1 - \frac{T_2}{T_1} \,<\, 0}}^{<0}\Bigg) \geqslant -Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$T_2 > T_1$

$\frac{Q_2}{Q_1} < -\frac{T_2}{T_1}$ (IRR.)

$\frac{Q_2}{Q_1} = -\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| \Rightarrow \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| > \frac{T_2}{T_1}$

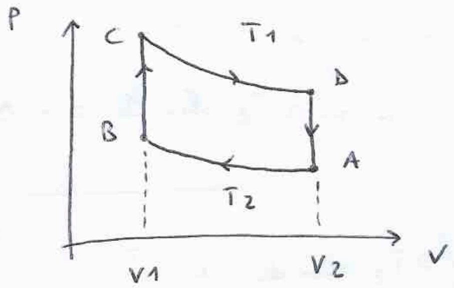
... Autrement ...

$$\underset{\substack{\uparrow \\ W>0}}{W} = |W| = Q_1\left|1 - \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|\right| \geqslant Q_1\left|\underset{1-\frac{T_2}{T_1} \leqslant 0}{1 - \frac{T_2}{T_1}}\right| = \overbrace{Q_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)}^{W_{MIN}}$$

$$1 - \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| \leqslant 1 - \frac{T_2}{T_1} \underset{\substack{\uparrow \\ T_2 > T_1}}{\leqslant} 0 \Rightarrow \left|1 - \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|\right| \geqslant \left|1 - \frac{T_2}{T_1}\right|$$

//

• EX. 2 : CYCLE et MOTEUR de STIRLING



$T_1 > T_2$; $a = \dfrac{V_2}{V_1}$

(1)

(a) Vu le cycle : $T_1 > T_2$. Les échanges de chaleur ont lieu au cours soit des isothermes soit des isochores.

Au cours d'une ISOTHERME (T) : $\Delta U = 0$ (G.P.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = -W = \int P\,dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$\Rightarrow$ DÉTENTE ISOTHERME CD : $Q_{CD} = nRT \ln a > 0$
(chaleur reçue)

Au cours d'une ISOCHORE :

$V = \text{const} \Rightarrow \Delta U = Q = n C_V \Delta T$

$\Rightarrow$ ISOCHORE BC : $Q_{BC} = n C_V (T_1 - T_2) > 0$
(chaleur reçue)

Les signes seront opposés pour les deux autres transformations.

$$\Rightarrow \boxed{Q_1 = Q_{BC} + Q_{CD} = n C_V (T_1 - T_2) + nRT_1 \ln a = nR\left(T_1 \ln a + \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}\right)}$$

$C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$, car $\gamma = \dfrac{C_V + R}{C_V}$

(b) Réciproquement, de la chaleur est cédée par le système au cours des transformations :

ISOCHORE DA $\longrightarrow$ $Q_{DA} = n C_V (T_2 - T_1)$

ISOTHERME AB $\longrightarrow$ $Q_{AB} = + nRT_2 \ln \frac{1}{a} = - nRT_2 \ln a$

$$\Rightarrow \boxed{Q_2 = Q_{DA} + Q_{AB} = nR\left(-T_2 \ln a + \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}\right)}$$

(c) Le cycle de Stirling est décrit dans le sens horaire donc moteur.

ISOCHORES (BC, DA) : $V = \text{cst} \Rightarrow W_{BC} = W_{DA} = 0$

Au cours d'une ISOTHERME : $W = -\int p\,dV = -nRT \int \frac{dV}{V}$

$$\Rightarrow W = W_{AB} + W_{CD} = -nRT_2 \ln \underbrace{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}_{= \frac{1}{a}} - nRT_1 \ln \underbrace{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}_{= a} =$$

$$= \boxed{nR(T_2 - T_1) \ln a = W}$$; $W < 0$, car $T_2 < T_1$; $a > 1$
$\Rightarrow$ TRAVAIL CÉDÉE

L'autre façon d'obtenir W est d'écrire que :

$W = -Q_1 - Q_2$ (1er PRINCIPE sur un CYCLE : $\Delta U = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{W = -Q_1 - Q_2 = +nR(T_2 - T_1) \ln a < 0}$$

(d) RENDEMENT

$$\eta = \frac{|W|}{Q_C} \underset{Q_C = Q_1}{=} \frac{|W|}{Q_1} \underset{W<0}{=} -\frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1+Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_2 \ln a + \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}}{T_1 \ln a + \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1}}}$$

(2)

RENDEMENT CYCLE CARNOT correspondant :

$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Expression similaire à la précédente.

2° PRINCIPE : $\eta_{MAX} = \eta_C \Rightarrow \eta < \eta_C$

(3)

En supposant qu'un régénérateur parfait soit utilisé, l'énergie cédée Q_{DA} au cours du refroidissement isochore peut être récupérée pour le réchauffage au cours de la transformation isochore BC.

$\Rightarrow Q_1 = Q_{CD} = mr\,T_1 \ln a$ CHALEUR À FOURNIR AU GAZ

seulement au cours de l'isotherme.

$T_2 < T_1$

$\Rightarrow$ RENDEMENT : $\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{|W|}{Q_{CD}} = \frac{mr\,|T_2 - T_1| \ln a}{mr\,T_1 \ln a} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

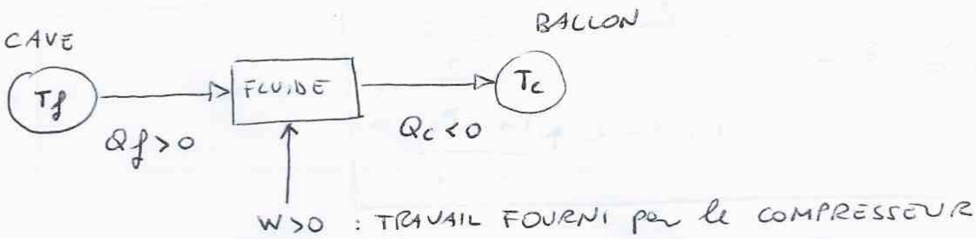
$\Rightarrow \eta = \eta_C$ dans ce cas

EX. 3 : CHAUFFE-EAU THERMODYNAMIQUE à ACCUMULATION

POMPE À CHALEUR (PAC)

$T_f = 11°C$ (Cave)

$T_c = 55°C$ (Ballon accumulation eau)



→ QUESTION : "RENDEMENT" (ou COP : coefficient de performance) ?

1° PRINCIPE (sur 1 CYCLE) : $W + Q_c + Q_f = 0$

"RENDEMENT" (COP) : $COP = \dfrac{Q_f}{W} = -\dfrac{Q_f}{Q_c + Q_f} = -\dfrac{1}{1 + \dfrac{Q_c}{Q_f}}$

$W = -(Q_c + Q_f) > 0$
$Q_f > 0$

2° PRINCIPE (sur 1 CYCLE) : $\Delta S = \dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow$

réversibilité   cycle

$\Rightarrow \dfrac{Q_f}{Q_c} = -\dfrac{T_f}{T_c} \Rightarrow \boxed{COP = -\dfrac{1}{1 - \dfrac{T_c}{T_f}} = \dfrac{T_f}{T_c - T_f}}$

COEFFICIENT de PERFORMANCE (COP)

Numériquement : $COP = \dfrac{273 + 11}{55 - 11} \simeq 6,45$