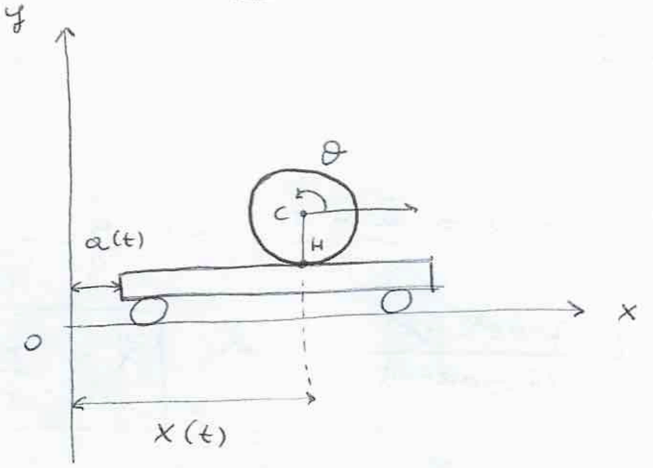
• EX. 1 :



Q1)

Oxyz GALILÉEN

POINT de CONTACT H : $\begin{cases} v_H = \dot{a} & H \in \text{CHARIOT} \\ v_H = \dot{X} + R\dot{\vartheta} & H \in \text{CYLINDRE} \end{cases}$ $\Rightarrow \dot{a} = \dot{x} + R\dot{\vartheta}$ (CONDITION de NON GLISSEMENT)

$\dot{a} = \dot{x} + R\dot{\vartheta}$ => RELATION ENTRE les COORD. GÉNÉRALISÉES X et ϑ =>

=> CONTRAINTE HOLONOME.

Q2)

ϑ : COORD. GÉNÉRALISÉE ; 1 DEGRÉ de LIBERTÉ

$L = T - V$ LAGRANGIEN

$T = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{a} - R\dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2$ EN. CINÉTIQUE

I : MOMENT INERTIE autour de l'axe

FORCES : ROULEMENT déjà pris en compte à travers la relation entre ϑ et X.

POIDS → ne contribue pas, car la position verticale du centre de masse ne varie pas.

=> $L = T$

Q3) EQ. LAGRANGE

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = -M(\dot{a} - R\dot{\vartheta})R + I\dot{\vartheta}$ =>

$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$

$\Rightarrow -MR\ddot{a} + MR^2\ddot{\vartheta} + I\ddot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\vartheta} = \frac{MR}{I + MR^2}\ddot{a}}$

Q4)

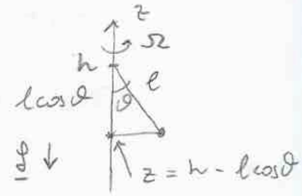
$$\ddot{\vartheta} = \frac{MR}{I + MR^2}\,\ddot{a}$$

$$\dot{a} = \dot{x} + R\dot{\vartheta} \Rightarrow \ddot{\vartheta} = \frac{\ddot{a} - \ddot{x}}{R} \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{R} - \frac{\ddot{x}}{R} = \frac{MR}{I + MR^2}\,\ddot{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \cancel{R}\,\ddot{a}\,\frac{I + \cancel{MR^2} - \cancel{MR^2}}{(I + MR^2)\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{I}{I + MR^2}\,\ddot{a}}$$

• **EX. 2 :**

Q1)



COORD. GÉNÉRALISÉE : ϑ

MOUVEMENT VERTICAL — MOUVEMENT HORIZONTAL

EN. CINETIQUE : $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \sin^2\vartheta\, \Omega^2$ $\Rightarrow$

EN. POTENTIELLE (due à la pesanteur) : $V = - m g\, l \cos\vartheta$

en négligeant des éventuels termes constants dus au choix de l'origine de la coordonnée verticale z

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \sin^2\vartheta\,\Omega^2 + m g l \cos\vartheta$$ LAGRANGIEN

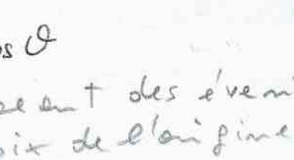
ça permet de simplifier la notation; la dynamique ne sera pas affectée par ce choix.

Q2)

$$L \to \frac{L}{m l^2} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\vartheta + \omega_0^2 \cos\vartheta$$

$$L = T(\dot{\vartheta}) - V_{eff}(\vartheta) \Rightarrow V_{eff} = -\frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\vartheta - \omega_0^2\cos\vartheta$$ POTENTIEL EFFICACE



Q3)

$0 \leq \vartheta \leq \pi$

$\Omega \ll \omega_0$ (ROTATION LENTE) $\Rightarrow V_{eff} \simeq -\omega_0^2 \cos\vartheta \Rightarrow \vartheta = 0$: EQUILIBRE STABLE

Ω SUFFISAMMENT GRAND $\Rightarrow \vartheta \neq 0$: EQUILIBRE STABLE

en principe, car les deux termes contribuent à Veff et, donc, le max. du potentiel efficace dépendra de leur importance relative.

Q4) POSITIONS EQUILIBRE

$$\frac{dV_{eff}}{d\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 \quad : \text{EQUILIBRE}$$

$$0 = \frac{dV_{eff}}{d\vartheta} = -\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \omega_0^2 \sin\vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{EQUILIBRE :} \begin{cases} \vartheta_0^{(1)} = 0 \\ \vartheta_0^{(2)} = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right) \\ \vartheta_0^{(3)} = \pi \end{cases}$$

← ce point existe uniquement si $\Omega > \omega_0$ (ROTATION RAPIDE)

Q5) $\vartheta_0^{(3)} = \pi$: MAX pour $V_{eff}(\vartheta)$ ⇒ INSTABLE ⇒ pas intéressant dans la pratique

$$V_{eff}(\pi) = \cancel{-\frac{\Omega^2}{2}\underbrace{\sin^2\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi}}_{0}} - \omega_0^2 \underbrace{\cos\vartheta\Big|_{\vartheta=\pi}}_{-1} = \omega_0^2 > 0 \quad \forall \Omega$$

Q6) MODE OPÉRATOIRE SOUHAITÉ : $\vartheta_0 = \vartheta_0^{(2)} \neq 0$, EQUILIBRE pour Ω SUFFISAMMENT ÉLEVÉ

Q7) PULSATION PETITES OSCILLATIONS :

$$\omega = \sqrt{\frac{d^2V_{eff}}{d\vartheta^2}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0}} \quad ; \quad \frac{d^2V_{eff}}{d\vartheta^2} = -\Omega^2\cos 2\vartheta + \omega_0^2\cos\vartheta$$

$$\vartheta_0 \equiv \vartheta_0^{(1)} = 0 \Rightarrow \frac{d^2V_{eff}}{d\vartheta^2}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0^{(1)}} = \underbrace{-\Omega^2 + \omega_0^2}_{} = \omega_0^2\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{(ROTATION LENTE } \Omega < \omega_0)}$$

si $\Omega < \omega_0$ ⇒
⇒ $\omega_0^2 - \Omega^2 > 0$ ⇒
⇒ STABLE

si $\Omega > \omega_0$ ⇒ $\left(1 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^4}\right) > 0$ ⇒
⇒ STABLE

$$\vartheta_0 \equiv \vartheta_0^{(2)} = \arccos\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \Rightarrow \frac{d^2V_{eff}}{d\vartheta^2}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0^{(2)}} = \Omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^2} = \Omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^4}\right) \Rightarrow$$

$\cos\vartheta_0^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \Omega\sqrt{1 - \frac{\omega_0^4}{\Omega^4}} \quad \text{(ROTATION RAPIDE } \Omega > \omega_0)}$$

Q8) DIAGRAMME de BIFURCATION