UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°A2 : Formalisme de Lagrange et systèmes mécaniques

Exercice 1 : Cylindre roulant sur un chariot en mouvement

Un cylindre homogène de rayon R, masse M et moment d'inertie I autour de son axe, roule sans frottement sur un chariot horizontale. Le chariot effectue un mouvement de translation le long d'une direction perpendiculaire à l'axe du cylindre, avec une loi donnée $a(t)$. Cette situation correspond, par exemple, au mouvement d'une bouteille dans le coffre d'une voiture.

Q1) Comme coordonnée généralisée on peut choisir l'angle θ qui spécifie un la position d'un point arbitraire du cylindre le long de la direction horizontale. Montrer que la position X du centre du cylindre dans un référentiel galiléen est liée à θ par une contrainte holonome, à déterminer.

Q2) Déterminer le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$.

Q3) Ecrire l'équation de Lagrange correspondante.

Q4) Déterminer l'expression de l'accélération du centre du cylindre.

Exercice 2 : Régulateur à boules

Le régulateur à boules de James Watt (Fig. 1) est un système permettant de réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur. Il est constitué par une tige verticale relié avec un ou plusieurs bras lié à sa sommité par des charnières. Le système entier est mis en mouvement en faisant tourner la tige avec une vitesse angulaire Ω. Si Ω est grand, l'angle θ des bras avec la verticale atteindra une valeur spécifique qui fera déclencher un interrupteur mécanique afin de limiter l'augmentation ultérieure de la vitesse angulaire.

Dans cet exercice on pourra considérer que le régulateur soit composé par un seul bras de masse négligeable et de longueur l, et par un point matériel de masse m attaché à son extrémité. La charnière assure que le mouvement du bras soit dans un plan vertical qui est lié à la tige, c'est-à-dire qu'il tourne avec elle.

Q1) Pour une valeur donnée de Ω, déterminer le lagrangien du système.

Q2) Afin de simplifier la notation on considérera dans la suite le lagrangien divisé par ml^2, $L \to L/(ml^2)$, et on introduira la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Le problème se prête à une tractation en termes d'un potentiel efficace V_{eff} tel que $L = T(\dot{\theta}) - V_{eff}$ où $T(\dot{\theta})$ est un terme cinétique dépendant uniquement de $\dot{\theta}$; identifier le potentiel V_{eff}.

Q3) Sans faire de calculs et en sachant que $0 \leq \theta \leq \pi$, identifier la position d'équilibre stable dans le cas de rotation très lente ($\Omega \ll \omega_0$). Sauriez-vous dire si la position d'équilibre stable change pour des valeurs suffisamment grandes de Ω ?

Q4) Déterminer les positions d'équilibre.

Q5) Identifier la position d'équilibre instable à travers des considérations simples. Est-ce que cette position est intéressante pour des buts pratiques ?

Q6) Quelle serait la position intéressante pour le mode opératoire du régulateur ?

Q7) Déterminer la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable dans le cas de rotation lente ($\Omega < \omega_0$) et dans le cas de rotation rapide ($\Omega > \omega_0$).

Q8) Tracer le diagramme de bifurcation du système, c'est-à-dire le graphique des positions d'q́uilibre en focntion du rapport Ω/ω_0.

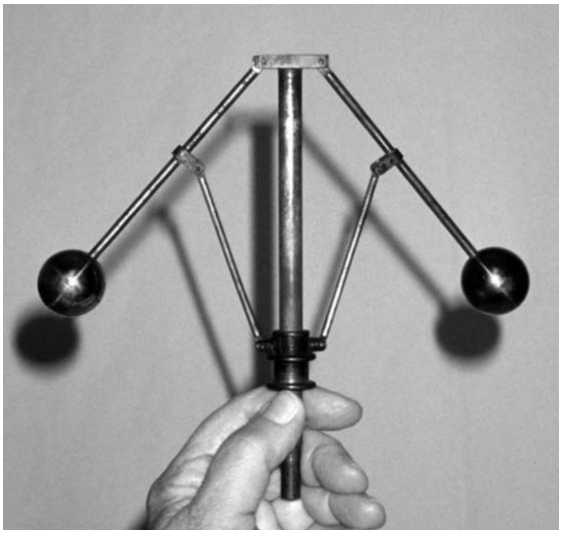

Figure 1 – Régulateur à boules de Watt.