UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°A1 : Petites oscillations et modes propres

Exercice 1 : Modes de vibration d'une molécule triatomique linéaire

Nous nous intéressons aux vibrations longitudinales d'une molécule triatomique linéaire et symétrique. Nous adoptons un modèle simple dans lequel chaque atome correspond à un point matériel (Fig. 1). Les masses des trois atomes sont notées m, M, m ; les forces attractives entre ces masses sont représentées par deux ressorts élastiques, de constante k, identiques (approximation harmonique). Comme coordonnées généralisées on utilisera les petits déplacements η_i de chaque masse i par rapport à sa position d'équilibre.

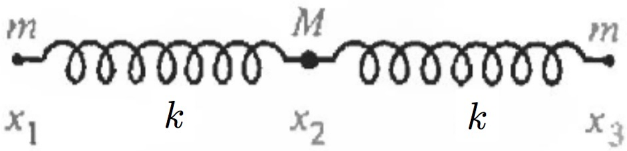

FIGURE 1 – Modèle d'une molécule triatomique linéaire et symétrique.

Q1) Ecrire le lagrangien du système.

Q2) Ecrire les équations de Lagrange pour les petites oscillations et identifier les matrices énergie cinétique $\boldsymbol{T}$ et énergie potentielle $\boldsymbol{V}$.

Q3) En diagonalisant $\boldsymbol{V}$ par rapport à $\boldsymbol{T}$, déterminer les pulsations propres ω_i ; on rappel que $\lambda_i \equiv \omega_i^2$, avec λ_i les valeurs propres.

Q4) Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres précédemment trouvées.

Q5) Un mode propre est mou, c'est à dire que sa fréquence est nulle. Dans ce cas la solution ne dépend pas du temps de la même manière qu'un oscillateur harmonique. En substituant cette solution dans les équations de Lagrange, identifier le type de mouvement correspondant et donner les expression de η_i en fonction du temps. Ce mode correspond à une quantité conservée, laquelle et pourquoi ?

Q6) En les substituant dans les équations de Lagrange, donner une interprétation simple des deux autres modes.

Q7) Donner la forme générale de la solution qui décrit l'évolution temporelle des trois masses.