Q1) CONSTRUCTION DU MODÈLE

x : PROIE
y : PRÉDATEUR } NOMBRE d'individus ; $x, y \geq 0$

r_1 : TAUX CROISSANCE PROIES — γ_1 : PRÉDATION — $r_1, r_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$
r_2 : " " PRÉDATEURS — γ_2 : CHASSE

(i) si $y = 0$ (absence de prédateurs) $\Rightarrow \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r_1$

si $y \neq 0$ $\Rightarrow$ décroissance linéaire avec le nombre de prédateurs : $\boxed{\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r_1 - \gamma_1 y}$

(ii) si $x = 0$ (absence de proies) $\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -r_2$ (extinction)

si $x \neq 0 \Rightarrow$ croissance linéaire avec le nombre des proies : $\boxed{\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -r_2 + \gamma_2 x}$

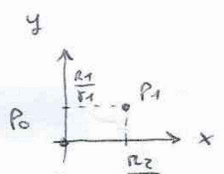
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r_1 x - \gamma_1 x y \\ \frac{dy}{dt} = -r_2 y + \gamma_2 x y \end{cases}}$$

MODÈLE de LOTKA-VOLTERRA (PRÉDATEUR - PROIE)

Q2) POINTS FIXES (EQUILIBRE)

$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 \Rightarrow$ $x = 0, y = 0$: $P_0 = (0,0)$ EXTINCTION des 2 POPULATIONS

$y = \frac{r_1}{\gamma_1}, x = \frac{r_2}{\gamma_2}$: $P_1 = \left(\frac{r_2}{\gamma_2}, \frac{r_1}{\gamma_1}\right)$ POPULATIONS CONSTANTES



Q3) INTÉGRALE du MOUVEMENT

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - \gamma_1 y) = x f(y) \\ \dot{y} = y(-r_2 + \gamma_2 x) = y g(x) \end{cases} \Rightarrow -y g(x)\dot{x} + x f(y)\dot{y} = 0$$ et aussi :

$$-\frac{y g(x)\dot{x}}{xy} + \frac{x f(y)}{xy}\dot{y} = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{-r_2 y + \gamma_2 x y}{xy}\dot{x} + \frac{x r_1 - \gamma_1 x y}{xy}\dot{y} = 0 \iff 0 = \underbrace{-\frac{\gamma_2 x - r_2}{x}\dot{x}}_{\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}} + \underbrace{\frac{r_1 - \gamma_1 y}{y}\dot{y}}_{\frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}} = \frac{dH(x,y)}{dt}$$

avec $H = H(x,y)$ l'intégrale du mouvement à déterminer $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\gamma_2 x - r_2}{x} \Rightarrow H = -\gamma_2 x + r_2 \ln x + h(y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{r_1 - \gamma_1 y}{y} \qquad h'(y) = \dfrac{r_1}{y} - \gamma_1 \Rightarrow h(y) = r_1 \ln y - \gamma_1 y \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(x,y) = r_2 \ln x + r_1 \ln y - \gamma_2 x - \gamma_1 y}$$

INTEGRALE du MOUVEMENT

$H(x,y) = H_0$

avec $H_0 = H(x_0, y_0)$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{array}\right\}$ C. INITIALES

Q4) ORBITES

$x = x(t)$, $y = y(t)$ telles que $H(x,y) = H_0 = \text{const.} \Rightarrow$ ISOLIGNES de $H(x,y)$

Q5) FORMULATION HAMILTONIENNE

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt}}_{\frac{d}{dt}(\ln x) = \dot q} = r_1 - \gamma_1 y = y \dfrac{\partial H}{\partial y} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \underbrace{\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}}_{\frac{d}{dt}(\ln y) = \dot p} = -r_2 + \gamma_2 x = -x \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

SYSTÈME HAMILTONIEN

voir Q2

$$\dfrac{\partial H}{\partial q} = \dfrac{\partial x}{\partial q}\dfrac{\partial H}{\partial x} = \underbrace{e^q}_{x} \dfrac{\partial H}{\partial x} = x \dfrac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{\partial y}{\partial p}\dfrac{\partial H}{\partial y} = \underbrace{e^p}_{y} \dfrac{\partial H}{\partial y} = y \dfrac{\partial H}{\partial y}$$

$$\begin{cases} q = \ln x \\ p = \ln y \end{cases} \leftarrow \text{TRANSFORMATION}$$

$$\begin{cases} x = e^q \\ y = e^p \end{cases}$$

$H(x,y) = r_2 \ln x + r_1 \ln y - \gamma_2 x - \gamma_1 y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{H(q,p) = r_2 q + r_1 p - \gamma_2 e^q - \gamma_1 e^p} \qquad \text{HAMILTONIEN}$$

$H = H(q,p)$ INDÉP. t explicitement $\Rightarrow H = $ const. du mouvement.

Q6) TRANSFORMATION: elle n'est pas canonique; le système n'est pas en forme hamiltonienne pour les variables x, y.

Q7) POINTS FIXES

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} = 0 \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{EXTRÊMES de } H(q,p)$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial H}{\partial p} = r_1 - \gamma_1 e^p \\ 0 = +\dfrac{\partial H}{\partial q} = r_2 - \gamma_2 e^q \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} e^p = \dfrac{r_1}{\gamma_1} \Rightarrow \boxed{p = \ln\left(\dfrac{r_1}{\gamma_1}\right)} \\ e^q = \dfrac{r_2}{\gamma_2} \Rightarrow \boxed{q = \ln\left(\dfrac{r_2}{\gamma_2}\right)} \end{array}$$

POINT FIXE

POINT FIXE : $p = \ln\left(\frac{r_1}{\gamma_1}\right)$, $q = \ln\left(\frac{r_2}{\gamma_2}\right) \iff x = \frac{r_2}{\gamma_2}$, $y = \frac{r_1}{\gamma_1}$

Le point fixe banal $P_0 = (0,0)$ n'est pas trouvé car la transformation $(x,y) \to (q,p)$ n'est pas définie pour $x = y = 0$.

Q8) CARACTÉRISTIQUES des ORBITES autour de $P_1 = \Big(\underset{\uparrow\, q}{\ln \frac{r_2}{\gamma_2}}, \underset{\uparrow\, p}{\ln \frac{r_1}{\gamma_1}}\Big)$, ou $P_1 = \Big(\underset{\uparrow\, x}{\frac{r_2}{\gamma_2}}, \underset{\uparrow\, y}{\frac{r_1}{\gamma_1}}\Big)$

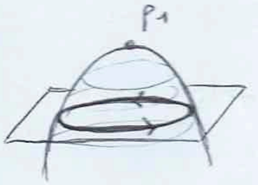
MATRICE HESSIENNE :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2 e^q & 0 \\ 0 & -\gamma_1 e^p \end{pmatrix}$$

et il faut calculer : $\det A\big|_{P_1}$; si $\det A\big|_{P_1}$: $\begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{MAX/MIN} \\ < 0 \Rightarrow \text{POINT de SELLE} \end{cases}$

$\det A = \gamma_1 \gamma_2 e^{q+p} > 0$, indépendamment du point où on le calcule $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_1$ est un EXTRÊME ; VALEURS PROPRES : $-\gamma_2 e^q < 0$ et $-\gamma_1 e^p < 0 \Rightarrow$ MAX de H



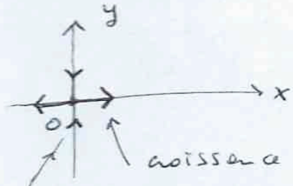
$H(x,y) = H_0 = $ const ; Les orbites associée à un point fixe qui est un MAX (ou min) de H sont périodique

Q9) DYNAMIQUE LOCALE autour de $P_0 = (\underset{\uparrow\, x}{0}, \underset{\uparrow\, y}{0})$ (EXTINCTION des 2 POPULATIONS)

On peut montrer que $P_0 = (0,0)$ est un POINT de SELLE $\Rightarrow$ il y a 1 direction stable et 1 direction instable (le long de x, y dans ce cas).

le long x : $y = 0 \Rightarrow \dot{x} = r_1 x - \cancel{\gamma_1 x y} = r_1 x$ INSTABLE car $r_1 > 0$

le long y : $x = 0 \Rightarrow \dot{y} = -r_2 y + \cancel{\gamma_2 x y} = -r_2 y$ STABLE car $r_2 > 0$

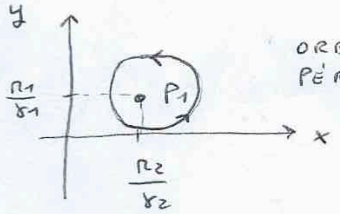


croissance indéfinie des proies, dans l'absence de prédateurs.

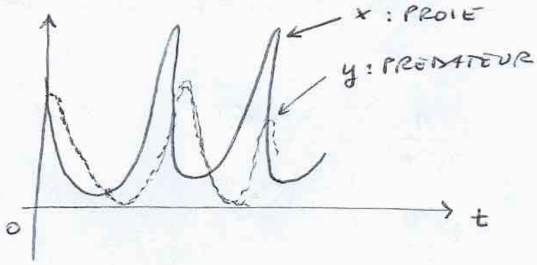
extinction des prédateurs dans l'absence de proies.

Q10) LOI des FLUCTUATIONS PÉRIODIQUES

On considère les trajectoires dans le plan (x,y) autour de $P_1 = \left(\frac{r_2}{\gamma_2}, \frac{r_1}{\gamma_1}\right)$



ORBITES PÉRIODIQUES $\Rightarrow$ EVOLUTION de $x = x(t)$ et $y = y(t)$



Du point de vue ECOLOGIQUE:

Abondance de prédateurs $(y \uparrow) \Rightarrow$

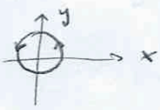
$\Rightarrow$ Elimination de proies $(x \downarrow)$; après un certain temps : manque de nourriture pour les prédateurs $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Diminution des prédateurs $(y \searrow) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Augmentation des proies

$\Rightarrow$ DYNAMIQUE CYCLIQUE, avec un déphasage entre $x(t)$ et $y(t)$

[ce qui est typique dans un mouvement périodique:



$y \uparrow \Rightarrow x \searrow$

$y \searrow \Rightarrow x \uparrow$]