UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°8 : Formalisme hamiltonien et dynamique des populations

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Modèle de Lotka-Volterra

En 1926 Vito Volterra proposa un modèle mathématique pour décrire l'évolution temporelle des populations de poissons prédateurs et proies dans la mer Adriatique. Les mêmes équations différentielles définissant le modèle avaient déjà été introduites, de manière indépendante, en 1910 par Alfred Lotka dans la théorie des réactions chimiques. Malgré sa capacité de représenter des écosystèmes réalistes soit limitée par son caractère très idéalisé, le modèle de Lotka-Volterra est aujourd'hui souvent considéré comme une composante de base dans la description mathématique de réseaux trophiques plus complexes. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement dynamique du modèle.

Construction du modèle et points fixes

Q1) Les hypothèses à la base du modèle sont les suivantes.

(i) Dans l'absence de prédateurs le taux de croissance par individu de la population des proies est constant (et positif), mais il décroit linéairement avec la taille de la population des prédateurs si un mécanisme de prédation est présent.

(ii) Dans l'absence de proies le taux de croissance par individu de la population des prédateurs est constant et négatif (extinction partielle des prédateurs), mais il croît linéairement avec la taille de la population des proies, quand ces dernières sont présentes.

En dénotant x et y, respectivement, les populations des proies et des prédateurs (nombre d'individus), écrire les équations d'évolution temporelle (équations du mouvement) pour les deux populations. Ici on introduira, également, les paramètres (tous positifs) : r_1 (taux de croissance de la population des proies), r_2 (taux d'extinction de la population des prédateurs), γ_1 (qui caractérise l'efficacité de la prédation), γ_2 (qui caractérise l'efficacité de la chasse).

Q2) Déterminer les points fixes des équations précédentes, c'est-à-dire les points correspondant aux situations d'équilibre, dans lesquelles les deux populations n'évoluent pas au cours du temps.

Intégrale du mouvement

Q3) Les équations d'évolution des deux populations peuvent s'écrire sous la forme générale

$$\begin{cases} \dot{x} &= x f(y), \\ \dot{y} &= y g(x). \end{cases}$$

En combinant ces équations (et en utilisant la forme spécifique des fonctions $f(y)$ et $g(x)$ trouvée à la question Q1)) montrer qu'il existe une intégrale du mouvement, c'est-à-dire une fonction $H(x, y)$ telle que $\dot{H} = 0$. Déterminer ensuite la fonction H. Pour cela faire, il peut être pratique de combiner les équations ci-dessus dans une forme qui permet de séparer les dépendances des variables x et y.

Q4) Sans faire de calculs, sauriez vous dire quelle condition faisant intervenir l'intégrale du mouvement $H(x, y)$ doit être satisfaite par les trajectoires $(x(t), y(t))$ du système ?

Formulation hamiltonienne

Q5) En partant de la forme des équations du mouvement en termes de taux de croissance par individu (à savoir $\dot{x}/x = f(y)$ et $\dot{y}/y = g(x)$, où $f(y)$ et $g(x)$ sont les fonctions déterminées précédemment), montrer que le système admet une formulation hamiltonienne, avec un hamiltonien $H(q, p)$ à déterminer, suite à un changement de variables opportun $(x, y) \to (q, p)$.

Q6) Est la transformation de coordonnées utilisée à la question Q5) canonique ?

Q7) Déterminer les points fixes du système dans sa forme hamiltonienne.

Orbites et leur signification biologique

Q8) Les points stationnaires d'une fonction de deux variables $F(x, y)$ peuvent être caractérisés par le déterminant de la matrice hessienne :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, un point stationnaire P_1 est un minimum ou un maximum si $det(A)|_{P_1} > 0$, et un point de selle si $det(A)|_{P_1} < 0$. Dans le premier cas, si les valeurs propres de A sont toutes négatives (positives), alors P_1 est un maximum (minimum).
En calculant la matrice hessienne de $H(q, p)$ pour le point fixe non banal (différent de $(0, 0)$), préciser de quel type de point stationnaire il s'agit. Quel type d'orbites peuvent, donc, lui être associées, c'est-à-dire quel type de "mouvement" se produit à proximité de ce point fixe ?

Q9) On revient maintenant au modèle écrit pour les variables x et y. Il est possible de montrer que, localement, la dynamique autour de P_0 est caractérisée par l'existence d'une direction stable et d'une direction instable (le long de x et y). Sauriez-vous dire, à partir des équations du mouvement, laquelle des directions x et y est stable et laquelle est instable ?

Q10) Déterminer de manière qualitative le comportement des populations x et y en fonction du temps, à partir de la forme des trajectoires de phase (dans le plan (x, y)) autour du point fixe non banal $P_1 \neq (0, 0)$. Sauriez-vous fournir une interprétation écologique du comportement du système ?