TD7

- EX. 1 :

Q1) (q,p) : COORD. CANONIQUES

$$\begin{cases} Q = p \\ P = q \end{cases}$$ TRANSFORMATION

TEST BASÉ sur les CROCHETS de POISSON :

$$[Q_j, Q_k]_{Q,P} = [Q_j, Q_k]_{q,p} = 0$$

$$[P_j, P_k]_{Q,P} = [P_j, P_k]_{q,p} = 0$$

$$[Q_j, P_k]_{Q,P} = [Q_j, P_k]_{q,p} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

où : $$[A,B]_{x,y} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial y_i} - \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right)$$ CROCHETS de POISSON

SYSTÈME à 1 DEGRÉ de LIBERTÉ => seulement $[Q,P]$ à contrôler

$$[Q,P]_{Q,P} = \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial Q} \frac{\partial P}{\partial P}}_{1} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial Q}}_{0} = 1$$

Par contre ...

$$[Q,P]_{q,p} = \overbrace{\cancel{\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p}} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}}^{[p,q]_{q,p}} = -1$$

$\frac{\partial Q}{\partial q} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial p} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial q} = 1$

=> la TRANSFORMATION n'est pas canonique

Q2) (q,p) : COORD. CANONIQUES

a) $$\begin{cases} Q = 2q + p^2 \\ P = \frac{p}{2} \end{cases}$$ TRANSFORMATION

en utilisant les PROPRIÉTÉS des CROCHETS de POISSON

$$[Q,P]_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} =$$

$$= \left[2q + p^2, \frac{p}{2} \right]_{q,p} = \left[2q, \frac{p}{2} \right]_{q,p} + \left[p^2, \frac{p}{2} \right]_{q,p} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \underbrace{[q,p]_{q,p}}_{1} + \frac{1}{2} \Big\{ p \underbrace{[p,p]_{q,p}}_{0} + p \underbrace{[p,p]_{q,p}}_{0} \Big\} = 1 \Rightarrow$$

=> la TRANSFORMATION EST CANONIQUE

b)

FONCTION GENERATRICE TYPE 2

TYPE 2 : $F = F_2(q, P)$

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial F_2(q,P)}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial F_2(q,P)}{\partial P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = p(q,P) \\ Q = Q(q,P) \end{cases}$$

On peut les expliciter à partir des équations de la transformation.

TRANSFORMATION
$$\begin{cases} Q = 2q + p^2 & \Rightarrow Q = 2q + 4P^2 \\ P = \dfrac{p}{2} & \Rightarrow p = 2P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial q} = 2P \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial P} = 2q + 4P^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ par intégration : $F_2 = 2qP + \underbrace{g(P)}$

constante d'intégration dépendant de P

$$\Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial P} = \cancel{2q} + 4P^2 \Rightarrow g'(P) = 4P^2 \Rightarrow g(P) = \frac{4}{3}P^3 + c \Rightarrow$$

$$= \cancel{2q} + g'(P)$$

const

$$\Rightarrow \boxed{F_2(q,P) = 2qP + \frac{4}{3}P^3}$$

en ayant fixé $c = 0$ (la constante est irrélevante pour la transformation)

c) FONCTION GENERATRICE TYPE 3

TYPE 3 : $F = F_3(p, Q)$

$$\begin{cases} q = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \\ P = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = q(p,Q) \\ P = P(p,Q) \end{cases}$$

T. CANONIQUE
$$\begin{cases} Q = 2q + p^2 \\ P = \dfrac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{Q}{2} - \dfrac{p^2}{2} \\ P = \dfrac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} = q = \dfrac{Q}{2} - \dfrac{p^2}{2} \\ -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q} = P = \dfrac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow F_3 = -\frac{p}{2}Q + h(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial F_3}{\partial p} = \cancel{\frac{Q}{2}} - \frac{p^2}{2} \Rightarrow h'(p) = \frac{p^2}{2} \Rightarrow h(p) = \frac{p^3}{6} + \cancel{c}^{=0} \Rightarrow$$

$$= +\cancel{\frac{Q}{2}} - h'(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_3(p,Q) = -\frac{Qp}{2} + \frac{p^3}{6}}$$

• EX. 2 :

$\underline{r}_i = (x_i, y_i) \leftarrow$ POSITION VORTEX i ; $i = 1, \dots, N$; (x_i, y_i) : COORD. CANONIQUES

γ_i : INTENSITÉ (CIRCULATION) du VORTEX i ; $\gamma_i = \text{const.} \gtrless 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_i = - \sum_{j \neq i} \gamma_j \dfrac{y_i - y_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|^2} \\ \dot{y}_i = \sum_{j \neq i} \gamma_j \dfrac{x_i - x_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|^2} \end{cases}$$

EQUATIONS du MOUVEMENT

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \gamma_i \gamma_j \ln |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$

HAMILTONIEN

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

CROCHETS de POISSON

Q1) EQUATIONS du MOUVEMENT

$$\begin{cases} \dot{x}_k = [x_k, H] = \sum_j \dfrac{1}{\gamma_j} \Big(\underbrace{\dfrac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{= \delta_{jk}} \dfrac{\partial H}{\partial y_j} - \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial x_k}{\partial y_j} \dfrac{\partial H}{\partial x_j}}}_{=0} \Big) = \dfrac{1}{\gamma_k} \dfrac{\partial H}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k = [y_k, H] = \sum_j \dfrac{1}{\gamma_j} \Big(\underbrace{\cancel{\dfrac{\partial y_k}{\partial x_j} \dfrac{\partial H}{\partial y_j}}}_{=0} - \underbrace{\dfrac{\partial y_k}{\partial y_j}}_{= \delta_{jk}} \dfrac{\partial H}{\partial x_j} \Big) = -\dfrac{1}{\gamma_k} \dfrac{\partial H}{\partial x_k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{1}{\gamma_k} \dfrac{\partial H}{\partial y_k} = -\dfrac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \dfrac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_k} \dfrac{\partial \ln |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial y_k} = -\dfrac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \dfrac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_k} \dfrac{1}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \dfrac{\partial |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial y_k} \\ \dot{y}_k = -\dfrac{1}{\gamma_k} \dfrac{\partial H}{\partial x_k} = \dfrac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \dfrac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_k} \dfrac{\partial \ln |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial x_k} = \dfrac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \dfrac{\gamma_i \gamma_j}{\gamma_k} \dfrac{1}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \dfrac{\partial |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial x_k} \end{cases}$$

$$\frac{\partial |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \frac{\partial (y_i - y_j)}{\partial y_k} =$$

$$= \frac{y_i - y_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} (\delta_{ik} - \delta_{jk})$$

$\Rightarrow$

... et, de même :

$$\frac{\partial |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}{\partial x_k} = \frac{x_i - x_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} (\delta_{ik} - \delta_{jk})$$

$$\Rightarrow \dot{x}_k = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}} \frac{\gamma_i\gamma_j}{\gamma_k}\,\frac{y_i-y_j}{|\underline{r}_i-\underline{r}_j|^2}\,(\underbrace{\delta_{ik}}_{i=k}-\underbrace{\delta_{jk}}_{j=k}) =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\gamma_j\,\frac{y_k-y_j}{|\underline{r}_k-\underline{r}_j|^2}}_{T_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\gamma_i\,\frac{y_i-y_k}{|\underline{r}_i-\underline{r}_k|^2}}_{T_2=-T_1} = -\sum_{i\neq k}\gamma_i\,\frac{y_k-y_i}{|\underline{r}_k-\underline{r}_i|^2}$$

De manière analogue, on obtient : $\dot{y}_k = \sum_{i\neq k}\gamma_i\,\frac{x_k-x_i}{|\underline{r}_k-\underline{r}_i|^2}$

Q2)

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \dfrac{1}{\gamma_k}\dfrac{\partial H}{\partial y_k} \\[2mm] \dot{y}_k = -\dfrac{1}{\gamma_k}\dfrac{\partial H}{\partial x_k} \end{cases}$$

FLUIDE INCOMPRESSIBLE 2D

$\downarrow$

$\nabla\cdot\underline{v}=0 \Rightarrow \underline{v}_k = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y_k}, -\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\gamma_k}H = \Psi(x_k,y_k)$ FONCTION de COURANT

H est appelée ÉNERGIE CINÉTIQUE D'INTERACTION

Q3) $$\frac{dH}{dt} = \sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial H}{\partial y_i}\dot{y}_i\right) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}}_{=0} \underset{\text{EQUATIONS de HAMILTON}}{=} \sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\frac{1}{\gamma_i} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow H = $ const. du MOUVEMENT

Q4) CONSERVATION DU "MOMENT TOTAL"

$P = \sum_i \gamma_i x_i, \quad Q = \sum_i \gamma_i y_i$

p.ex. : $\dot{P} = \sum_i \gamma_i\dot{x}_i = \sum_i\gamma_i[x_i,H] = \sum_i[\gamma_i x_i, H] = [\sum_i \gamma_i x_i, H] = [P,H]$

$\dot{P} = [P,H]$
$\dot{Q} = [Q,H]$

à partir des définitions de P et Q et grâce au fait que $\dot{x}_k = [x_k,H]$ et $\dot{y}_k = [y_k,H]$

On peut montrer que $[P,H]=0$ et $[Q,H]=0$ et, donc, que $P=$ const. et $Q=$ const. Cependent, il est aussi simple de calculer directement les dérivées temporelle $\dot{P}, \dot{Q}$ en utilisant les équations du mouvement :

$$\dot{P} = \sum_k \gamma_k\dot{x}_k = -\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}}\underbrace{\gamma_i\gamma_k\frac{y_k-y_i}{|\underline{r}_k-\underline{r}_i|^2}}_{A_{ik}} = 0$$

car $A_{ki} = -A_{ik}$ (antisymétrique)
$i \leftrightarrow k \Rightarrow y_k - y_i$ change de signe.

Dans la même manière on montre que $\dot{Q}=0$.

$\dot{P}=\dot{Q}=0 \Rightarrow P,Q = $ const. du MOUVEMENT

On peut aussi montrer que $[P,Q] = \text{const.}$, par application de l'IDENTITÉ de JACOBI:

$$[P,H] = [Q,H] = 0$$

$$[P,\underbrace{\cancel{[Q,H]}}_{0}] + [Q,\underbrace{\cancel{[H,P]}}_{0}] + [H,[P,Q]] = 0 \Rightarrow [P,Q] = \text{const.}$$

Dans ce cas, le même résultat peut être obtenu avec un calcul direct, ce qui permet de calculer aussi la valeur de la constante.

En fait:

$$P = \sum_i \gamma_i x_i \; ; \; Q = \sum_j \gamma_j y_j$$

$$[P,Q] = \sum_k \frac{1}{\gamma_k}\left(\frac{\partial P}{\partial x_k}\frac{\partial Q}{\partial y_k} - \frac{\partial P}{\partial y_k}\frac{\partial Q}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{ijk} \frac{\gamma_i\gamma_j}{\gamma_k}\left(\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{\delta_{ik}}\underbrace{\frac{\partial y_j}{\partial y_k}}_{\delta_{jk}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}}}_{0}\right) = \sum_{ijk}\frac{\gamma_i\gamma_j}{\gamma_k}\delta_{ik}\delta_{jk} = \sum_k \gamma_k$$

$$\Rightarrow [P,Q] = \sum_k \gamma_k = \gamma \quad \text{CIRCULATION TOTALE}$$

Q5) CONSERVATION DU "MOMENT ANGULAIRE TOTAL"

$$l = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad \gamma_i = \text{const.} \; \forall i$$

$$\dot{l} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial l}{\partial t}}}_{0} + [l,H] \Rightarrow \dot{l} = [l,H]$$

Donc, si $[l,H] = 0 \Rightarrow l = \text{const.}$, ce qui peut être vérifié par un calcul direct.

REMARQUES:

(i) L'algèbre des quantités conservées est complétée par les relations suivantes:

$$[P,l] = 2Q \; ; \; [Q,l] = 2P \; .$$

(ii) → Il est aussi possible de montrer que H, l, (P^2+Q^2) sont 3 quantités conservées qui ont des crochets de Poisson nuls entre elles.

(iii) $P = \sum_i \gamma_i x_i$, $Q = \sum_i \gamma_i y_i$ sont les quantités conservées associées à l'INVARIANCE (ou SYMÉTRIE) du Hamiltonien par TRANSLATION. C'est pour ça qu'on les appelle "moments" (par analogie avec le moment linéaire).

$l = \sum_i \gamma_i (x_i^2 + y_i^2)$ est la quantité conservée associée à l'INVARIANCE par ROTATION du Hamiltonien. Pour cette raison on l'appelle "moment angulaire"

Q6) SYSTÈME de 2 VORTEXES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\gamma_2 \dfrac{y_1 - y_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \\ \\ \dot{y}_1 = \gamma_2 \dfrac{x_1 - x_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\gamma_1 \dfrac{y_2 - y_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \\ \\ \dot{y}_2 = \gamma_1 \dfrac{x_2 - x_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \end{cases}$$

Pour ce système les intégrales du mouvement P et Q sont données par:

$$P = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \quad ; \quad Q = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{P}{\gamma} \equiv \dfrac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \\ \dfrac{Q}{\gamma} = \dfrac{\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \end{cases}$$

COORD. CENTRE de CIRCULATION (parfois appelé aussi centre de vorticité).
$\frac{P}{\gamma}, \frac{Q}{\gamma}$ peuvent être interprété comme les COORD. du "CENTRE de MASSE"

=> Le POSITION du "CENTRE de MASSE" est une CONSTANTE du MOUVEMENT (quand $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 0$, autrement elle n'est pas définie: dénominateurs $= 0$)

MOUVEMENT RELATIF :

$$\begin{cases} X \equiv x_1 - x_2 \\ Y \equiv y_1 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \text{EQ. MOUVEMENT RELATIF} : \begin{cases} \dot{X} = -(\gamma_1 + \gamma_2) \dfrac{Y}{R^2} \\ \dot{Y} = (\gamma_1 + \gamma_2) \dfrac{X}{R^2} \end{cases}$$

où $\dot{X} = x_1 - x_2$; $\dot{Y} = \dot{y}_1 - \dot{y}_2$

$R^2 = X^2 + Y^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

• REMARQUE : $R =$ const du MOUVEMENT ; en fait on a :

$$\frac{dR^2}{dt} = 2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{EQ. MOUVEMENT} \\ \text{RELATIF}}}{=} -2(\gamma_1 + \gamma_2)\frac{XY}{R^2} + 2(\gamma_1 + \gamma_2)\frac{YX}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $R = \text{const}$

$$\begin{cases} \dot{X} = -\omega_0 Y \\ \dot{Y} = \omega_0 X \end{cases}$$

où $\omega_0 = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{R^2}$ est une VITESSE ANGULAIRE (où FRÉQUENCE)

$[\gamma] = [vL] = [L^2 t^{-1}]$

$[\omega_0] = [t^{-1}]$

ω_0 : VITESSE ANGULAIRE avec laquelle les 2 VORTEXES ORBITENT l'UN AUTOUR de l'AUTRE. Elle est inversement proportionnelle à la distance entre les 2 vortexes.

$$\begin{cases} \dot{X} = -\omega_0 Y \\ \dot{Y} = \omega_0 X \end{cases} \longrightarrow \text{SOLUTION}: \begin{cases} X = \mathrm{Re}[z] \\ Y = \mathrm{Im}[z] \end{cases}$$

avec $z = X + iY$ POSITION dans le PLAN COMPLEXE

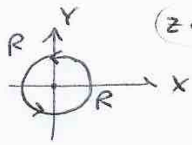
$i^2 = -1$ (unité imaginaire)

$$\dot{z} = i\omega_0 z \Rightarrow z = c\, e^{i\omega_0 t} = R\, e^{i(\omega_0 t + \phi)}$$

$\dot{z} = \dot{X} + i\dot{Y} =$
$= -\omega_0 Y + i\omega_0 X =$
$= i\omega_0 (X + iY) =$
$= i\omega_0 z$

Détermination de c :
$c = \text{const} \in \mathbb{C}$
$|z|^2 = X^2 + Y^2 = R^2 \Rightarrow |z| = |c| = R \Rightarrow$
$\Rightarrow c = R\, e^{i\phi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X \equiv x_1 - x_2 = R\cos(\omega_0 t + \phi) \\ Y \equiv y_1 - y_2 = R\sin(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$



$(z \in \mathbb{C})$

ROTATION AUTOUR du "CENTRE DE MASSE".

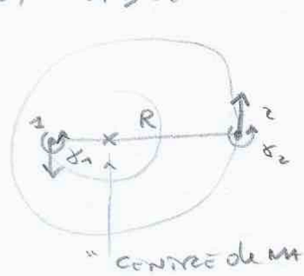
• REMARQUES :

(i) $N = 1 \Rightarrow$ STATIONNAIRE

(ii) $N = 2 \Rightarrow$ { ROTATION PERIODIQUE $\quad \gamma_1 + \gamma_2 \neq 0 \quad$ (a)
DIPOLE (PROPAGATION STATIONNAIRE) $\quad \gamma_1 = -\gamma_2 \quad$ (b)

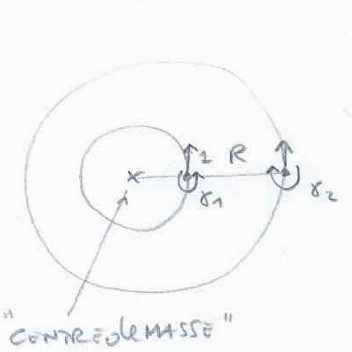
(a) $\gamma_1 \geq \gamma_2 > 0$

2 VORTEXES avec ROTATIONS dans le MÊME SENS mais de DIFFÉRENTES INTENSITÉS.



(b) $\gamma_1 \geq -\gamma_2 > 0$

2 VORTEXES avec de SENS de ROTATION OPPOSÉS



si $\gamma_2 \to -\gamma_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ le POINT × se déplace vers ∞ (TRANSLATION UNIFORME)

$\begin{cases} \dot{X} \equiv \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{Y} \equiv \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\gamma_1 + \gamma_2 = 0$

$\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_2 \; ; \; \dot{y}_1 = \dot{y}_2$

(iii) INTÉGRABILITÉ

$N = 3 \Rightarrow$ IL EXISTE une SOLUTION; son existence est garantie par l'existence des 3 QUANTITÉS CONSERVÉES H, ℓ, $(P^2 + Q^2)$ qui ont des crochets de Poisson nuls entre elles. Il s'agit d'un SYSTÈME INTÉGRABLE, c'est-à-dire pour lequel on peut trouver une solution $x_i(t)$, $y_i(t)$.

$N \geq 4 \Rightarrow$ le système est NON INTÉGRABLE; la DYNAMIQUE est CHAOTIQUE, mises à part des conditions initiales et/ou des valeurs de γ_i spéciales.

...Plus en général...

• CONDITION D'INTÉGRABILITÉ (nécessaire et suffisante) :

Pour un système avec N DEGRÉS de LIBERTÉ : EXISTENCE de N CONSTANTES du MOUVEMENT $F_i(\underline{q}(t), \underline{p}(t)) = \text{const}$; typiquement $F_1 = H$ avec $[F_i, F_j] = 0 \;\forall\, i,j$.