UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°7 : Transformations canoniques, crochets de Poisson et dynamique de vortexes

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Transformations canoniques

Q1) Soient (q, p) les coordonnées canoniques. En utilisant le crochets de Poisson, dire si la transformation suivante est canonique.

$$\begin{cases} Q &= p \\ P &= q \end{cases}$$

Q2) Soient (q, p) les coordonnées canoniques et soit

$$\begin{cases} Q &= 2q + p^2 \\ P &= \frac{p}{2} \end{cases}$$

une transformation $Q = Q(q, p)$, $P = P(q, p)$.

(a) En utilisant le crochets de Poisson, dire si la transformation est canonique.
(b) Trouver la fonction génératrice de type 2.
(c) Trouver la fonction génératrice de type 3.

Exercice 2 : Crochets de Poisson et dynamique de vortexes

On considère les équations du mouvement de N vortexes ponctuels dans le plan (x, y) :

$$\dot{x}_i = -\sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{y_i - y_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2}, \quad \dot{y}_i = \sum_{j \neq i} \gamma_j \frac{x_i - x_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^2},$$

avec $i = 1, ..., N$. Dans les équations ci-dessus $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i)$ et γ_i dénotent respectivement la position et l'intensité (circulation) du vortex i, voir aussi la Fig. 1.

On considère, également, le hamiltonien suivant :

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \gamma_i \gamma_j \ln |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|,$$

ainsi que les crochets de Poisson, définis comme suit :

$$[f, g] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right).$$

Q1) Vérifier que les équations de Hamilton

$$\dot{x}_k = [x_k, H], \quad \dot{y}_k = [y_k, H]$$

correspondent aux équations du mouvement.

Q2) Compte tenu que dans ce probème on considère un fluide incompressible en deux dimensions, sauriez vous mettre en relation H avec une autre quantité physique utilisée en dynamique des fluides ?

Q3) Calculer la dérivée totale du hamiltonien par rapport au temps et montrer que H est une constante du mouvement.

Q4) En utilisant les crochets de Poisson, montrer que les quantités suivantes sont conservées :

$$P = \sum_i \gamma_i x_i, \quad Q = \sum_i \gamma_i y_i.$$

En utilisant l'identité de Jacobi, déterminer si $[P, Q]$ est aussi une constante du mouvement. Calculer ensuite la valeur de $[P, Q]$.

Q5) On considère la quantité

$$l = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Exprimer la dérivée totale de l par rapport au temps à travers les crochets de Poisson. Sachant qu'un calcul direct donne $\dot{l} = 0$, à quelle condition correspond la conservation de l ?
Les quantités conservées P, Q sont souvent appelées les "moments" et l le "moment angulaire". Sans faire des calculs, sauriez-vous justifier ces noms à partir de la forme du hamiltonien ?

Q6) On considère ici un système de 2 vortexes. Ecrire les équations du mouvement. Déterminer ensuite les équations du mouvement relatif à travers les variables $X = x_1 - x_2$ et $Y = y_1 - y_2$. Résoudre ces équations et donner les expressions de $X(t)$ et $Y(t)$. Pour ce dernier calcul il est pratique de considérer l'évolution temporelle de la position dans le plan complexe $Z = X + iY$.

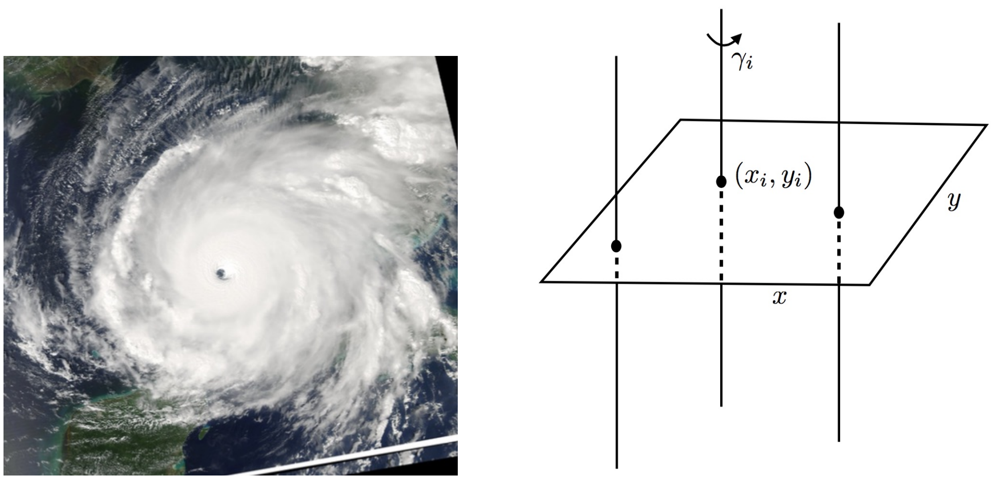

FIGURE 1 – A gauche : ouragan Rita (Golfe du Mexique, 2005). A droite : 3 vortexes ponctuels dans le plan (x, y).