UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°6 : Portrait de phase d'un système hamiltonien

Durée : 4 heures

Exercice 1 : Bille sur anneau tournant

On considère le mouvement d'une bille percée de masse m sur un anneau, de masse négligeable, en rotation autour de l'axe vertical z avec une vitesse de rotation constante $\dot{\phi} = \omega$ (Fig. 1). La bille est soumise à l'action de la pesanteur $\boldsymbol{g}$ et on supposera que le frottement entre elle et l'anneau soit négligeable.

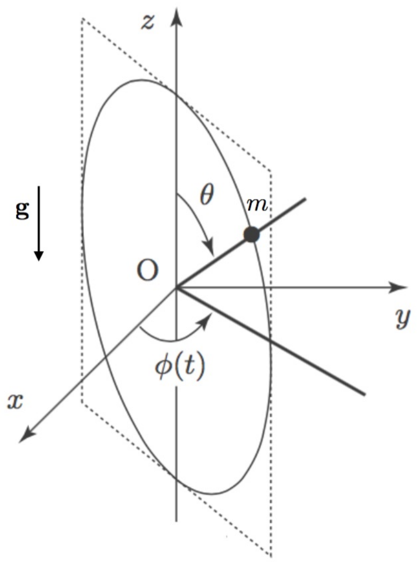

FIGURE 1 – Bille sur anneau tournant.

Du lagrangien à l'hamiltonien du système

Q1) Combien de degrés de liberté possède le système ? Identifier les coordonnées généralisées.

Q2) Ecrire le lagrangien du système.

Q3) A travers une transformation de Legendre, déterminer le hamiltonien.

Q4) Montrer que le hamiltonien ne dépend pas du temps et, donc, que l'énergie est une constante du mouvement.

Q5) Le hamiltonien du système peut s'écrire aussi comme $H = T + V_{eff}$, où $T = T(p)$ est un terme cinétique et V_{eff} est un potentiel efficace. Donner l'expression de V_{eff} et discuter la signification physique des différents termes qui y figurent. Montrer ensuite que V_{eff} est une fonction périodique symétrique par rapport à $\theta = \pi$; par conséquent il est possible de conduire l'étude dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Positions d'équilibre

Q6) A partir de l'expression de $V_{eff}(\theta)$ calculer les positions d'équilibre. Ici on pourra introduire la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

Q7) Quelle est la condition que l'énergie doit satisfaire pour que le mouvement soit possible ?

1. Cas de rotation rapide : $\omega > \omega_0$

Q8) Montrer que dans ce cas il existe deux points d'équilibre stable θ_s et $2\pi - \theta_s$ et que les points $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ correspondent à un équilibre instable, en comparant les valeurs du potentiel efficace dans ces points, $E_m \equiv V_{eff}(\theta_s)$, $V_{eff}(0)$ et $V_{eff}(\pi)$.

Analyse qualitative du mouvement et portrait de phase

Q9) Etudier le comportement du système pour $E_m < E < -mgR$. Déterminer le hamiltonien et l'équation du mouvement pour les petits déplacements $\eta = \theta - \theta_s$ autour de θ_s. Donner l'expression de la pulsation associée au mouvement harmonique résultant.

Q10) Etudier le comportement du système pour $-mgR < E < mgR$.

Q11) Etudier le comportement du système pour $E > mgR$.

Q12) Sauriez-vous dire quelle est l'équation des trajectoires dans l'espace des phases (θ, p) ? A partir des réponses aux questions précédentes Q9-11) et en s'appuyant éventuellement sur cette équation, tracer le portrait de phase du système, c'est-à-dire l'allure qualitative des trajectoires de phase en fonction des différentes valeurs de l'énergie E. A votre avis, quelle est la particularité des trajectoires correspondant aux valeurs spéciales $E = -mgr$ et $E = mgR$?

2. Cas de rotation lente : $\omega < \omega_0$

Positions d'équilibre

Q13) Déterminer les positions d'équilibre dans ce cas et discuter leur stabilité.

Analyse qualitative du mouvement et portrait de phase

Q14) Etudier le comportement du système pour (a) $-mgR < E < mgR$, (b) $E > mgR$.

Q15) Tracer le portrait de phase du système pour ce cas.

3. Diagramme de bifurcation

Q16) Tracer sur un graphique l'allure qualitative des angles qui correspondent aux positions d'équilibre stable en fonction de ω/ω_0. Le point de séparation des positions d'équilibre stable s'appelle bifurcation.