TD5

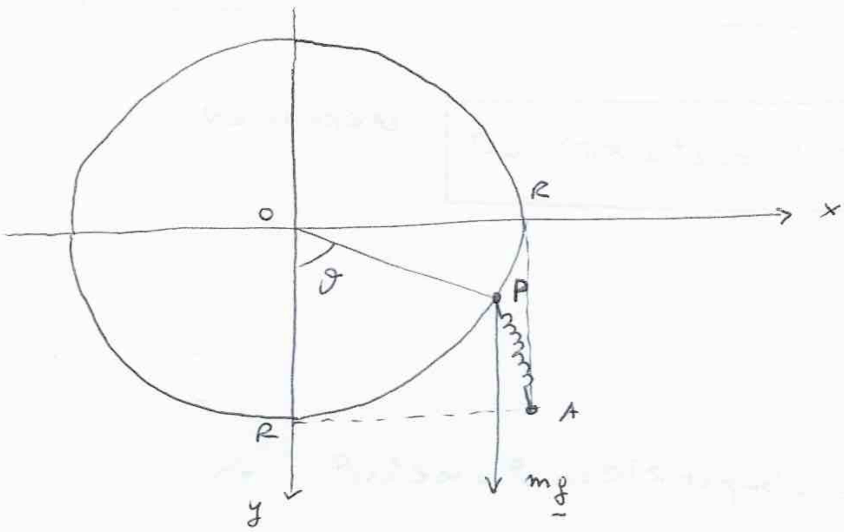
EX. 1 Référentiel Oxy : inertiel

A point fixe : $A = (R, R)$

P en mouvement sur le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

EQ. MOUVEMENT : $m\underline{a} = m\underline{g} - k\underline{AP} + \underline{R}$

au repos le ressort a une longueur nulle — réaction



Q1) LAGRANGIEN

POSITION de P : $\underline{r} = (x, y)$: $\begin{cases} x = R\sin\vartheta \\ y = R\cos\vartheta \end{cases}$ $\Rightarrow$ VITESSE de P : $\begin{cases} \dot{x} = R\cos\vartheta\,\dot\vartheta \\ \dot{y} = -R\sin\vartheta\,\dot\vartheta \end{cases}$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[R^2\cos^2\vartheta\,\dot\vartheta^2 + R^2\sin^2\vartheta\,\dot\vartheta^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m R^2 \dot\vartheta^2}$$ EN. CINÉTIQUE

$$\underset{\text{FORCE PESANTEUR}}{V = V^{(g)}} + \underset{\text{FORCE ELASTIQUE}}{V^{(k)}}$$ EN. POTENTIELLE $\left[V = V^{(g)} + V^{(k)} + \text{const} \right]$

$$V^{(g)} = -mgy = -mgR\cos\vartheta$$

$$V^{(k)} = \frac{1}{2} k |\underline{AP}|^2 = \frac{1}{2} k \left[(x-R)^2 + (y-R)^2 \right] = \frac{k}{2} \left[(R\sin\vartheta - R)^2 + (R\cos\vartheta - R)^2 \right] =$$

$$= \frac{k}{2} \left[R^2\sin^2\vartheta + R^2 - 2R^2\sin\vartheta + R^2\cos^2\vartheta + R^2 - 2R^2\cos\vartheta \right] =$$

$$= \frac{k}{2} \left[3R^2 - 2R^2\cos\vartheta - 2R^2\sin\vartheta \right]$$

$$V^{(g)} = -mgy = -mgR\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad V^{(k)} = \frac{1}{2}k|\underline{AP}|^2 = \frac{k}{2}\left[3R^2 - 2R^2\sin\vartheta - 2R^2\cos\vartheta\right] \quad \Rightarrow$$

$3R^2$: cost. => dans la costante additive de l'énergie potentielle et on fixe: cost. = 0

ÉNERGIE POTENTIELLE

$$\Rightarrow \boxed{V = -\underbrace{(mg + kR)}_{A}R\cos\vartheta - \underbrace{kR^2}_{B}\sin\vartheta = -A\cos\vartheta - B\sin\vartheta}$$

LAGRANGIEN

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + (mg + kR)R\cos\vartheta + kR^2\sin\vartheta}$$

Q2) EQUATION du MOUVEMENT

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = -(mg + kR)R\sin\vartheta + kR^2\cos\vartheta \quad \Rightarrow$$

EQUATION de LAGRANGE

$$\Rightarrow \boxed{mR^2\ddot{\vartheta} + (mg + kR)R\sin\vartheta - kR^2\cos\vartheta = 0}$$

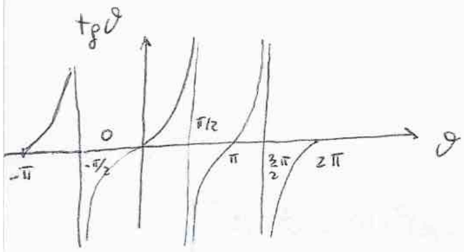
Q3) EQUILIBRE

$$V = V(\vartheta) = -A\cos\vartheta - B\sin\vartheta$$

EQUILIBRE : $\frac{dV}{d\vartheta} = 0 \Rightarrow A\sin\vartheta - B\cos\vartheta = 0 \Rightarrow \boxed{\vartheta_0 : \ tg\,\vartheta_0 = \frac{B}{A} = \frac{kR}{mg + kR}}$

$A, B > 0 \Rightarrow tg\,\vartheta_0 > 0 \Rightarrow$ 2 POSITIONS EQUILIBRE : $\begin{cases} \vartheta_0^{(1)} : \ 0 < \vartheta_0^{(1)} < \pi/2 & \in \text{I Q.} \\ \vartheta_0^{(2)} : \ \pi < \vartheta_0^{(2)} < \frac{3}{2}\pi & \in \text{III Q.} \end{cases}$

$$\vartheta_0^{(2)} = \vartheta_0^{(1)} + \pi$$



ou, de manière équivalente :

$$-\pi < \vartheta_0^{(2)} < -\frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta_0^{(2)} = \vartheta_0^{(1)} - \pi \qquad \in \text{III Q.}$$

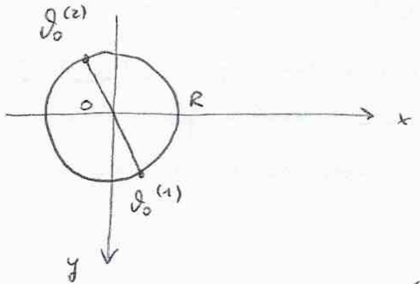
Q4) STABILITÉ

$$V''(\vartheta) \equiv \frac{d^2V}{d\vartheta^2} = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta$$

$V''(\vartheta_0^{(1)}) > 0 \Rightarrow \vartheta_0^{(1)}$ est un MINIMUM de $V(\vartheta) \Rightarrow$ STABLE

$V''(\vartheta_0^{(2)}) < 0 \Rightarrow \vartheta_0^{(2)}$ est un MAXIMUM de $V(\vartheta) \Rightarrow$ INSTABLE

Q5) ANALYSE QUALITATIVE du MOUVEMENT



$V = -A\cos\vartheta - B\sin\vartheta$

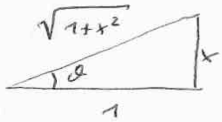
$V' = A\sin\vartheta - B\cos\vartheta$

$\underbrace{V' = 0 \Rightarrow \vartheta_0^{(1)}, \vartheta_0^{(2)}}_{\text{tels que: } \tan\vartheta_0 = \frac{B}{A}}$: EQUILIBRE

$$V(\vartheta_0^{(1)}) = -A\cos\Big(\underbrace{\arctan\left(\tfrac{B}{A}\right)}^{\vartheta_0^{(1)}}\Big) - B\sin\Big(\underbrace{\arctan\left(\tfrac{B}{A}\right)}^{\vartheta_0^{(1)}}\Big) = -\sqrt{A^2+B^2}$$

$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

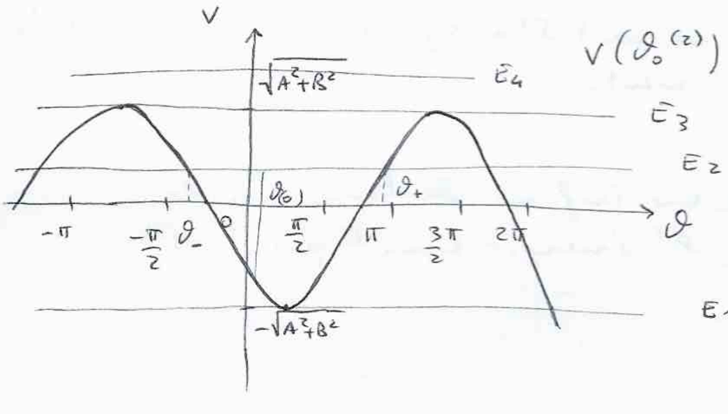
$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



$V(\vartheta_0^{(2)}) = V(\vartheta_0^{(1)} + \pi) = \sqrt{A^2+B^2}$

$V(\vartheta_0^{(1)}) = -\sqrt{A^2+B^2}$

$V(\vartheta_0^{(2)}) = \sqrt{A^2+B^2}$



(a) $E < V_{min} = -\sqrt{A^2+B^2}$

$E = T + V \Rightarrow E < V_{min}$: PAS PHYSIQUE, car $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V)} \in \mathbb{R}$

$T = \frac{mv^2}{2}$

(b) $E = E_1 = -\sqrt{A^2+B^2}$

La seule manière pour réaliser cette situation est de placer le point P dans la position d'équilibre (correspondant à $\vartheta_0^{(1)}$) avec vitesse nulle $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P au repos dans cette position d'équilibre.

(c) $-\sqrt{A^2+B^2} < E < \sqrt{A^2+B^2}$ $(E = E_2)$

P initialemento dans un point correspondent à un angle ϑ_0)
avec énergie cinétique $T_0 = E - V(\vartheta_0)$)

OSCILLATIONS entre ϑ_- et ϑ_+

racines simples de l'equation $E_2 = V(\vartheta)$

(d) $E = E_3 = \sqrt{A^2+B^2}$

Il y a 2 possibilités pour réaliser cette situation :

(i) P initialement dans la position d'équilibre correspondent à $\vartheta_0^{(2)}$
avec vitesse nulle $\Rightarrow$ P au repos dans cette position d'équilibre.

(ii) P initialement dans une autre position, avec énergie cinétique
$T_0 = E_3 - V(\vartheta_0)$)

$$T = \int_{\vartheta(0)}^{\vartheta_0^{(2)}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left[E_3 - V(\vartheta)\right]}}$$

quand $\vartheta \to \vartheta_0^{(2)}$: $V(\vartheta) \to E_3 \Rightarrow$ $T \to \infty$; la position d'équilibre ne peut être rejoint que asymptotiquement.

(e) $E = E_4 > \sqrt{A^2+B^2}$

Le point P effectue un nombre infini de tours sur la circonférence. Dans ce cas, l'énergie cinétique T est toujours non nulle.

Q6) PETITES OSCILLATIONS

$$\vartheta \simeq \vartheta_0^{(1)} \Rightarrow V(\vartheta) \simeq \cancel{\underbrace{V(\vartheta_0^{(1)})}_{\text{const.}}} + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2V}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0^{(1)}} \left(\vartheta - \vartheta_0^{(1)}\right)^2$$

$$\vartheta - \vartheta_0^{(1)} = \eta \quad \Rightarrow \quad V(\eta) \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2V}{d\vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0^{(1)}}}_{c\,=\,\text{const.}} \eta^2$$

ÉNERGIE POTENTIELLE

$$T = \frac{m}{2} R^2 \dot{\vartheta}^2 \underset{\dot\eta = \dot\vartheta}{=} \frac{m}{2} R^2 \dot{\eta}^2$$

ÉNERGIE CINÉMATIQUE

$$L = T - V = \frac{m}{2} R^2 \dot{\eta}^2 - \frac{c}{2} \eta^2$$ LAGRANGIEN

EQ. LAGRANGE: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow mR^2 \ddot{\eta} + c\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\eta} = -\frac{c}{mR^2}\eta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\eta} = -\omega^2 \eta \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}}$$

$c > 0$
car $\vartheta_0^{(1)}$ est un point d'équilibre stable

OSCILLATEUR HARMONIQUE de PULSATION $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Q7)

// RÉSULTAT GÉNÉRAL:

Eq. mouvement petites oscillations: $\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0$

système à 1 degré de liberté:

$$\tilde{T} \ddot{\eta} + \underbrace{\left.\frac{d^2V}{d\eta^2}\right|_{q_0}}_{V''(q_0)} \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{V''(q_0)}{\tilde{T}} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(q_0)}{\tilde{T}}} \quad \Rightarrow$$

avec $q = q_0$: position d'équilibre

$$\Rightarrow \quad T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{T}}{V''(q_0)}}$$

PÉRIODE PETITES OSCILLATIONS

//

• Dans notre cas:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{T}}{V''(\vartheta_0^{(1)})}}$$

$$V''(\vartheta_0^{(1)}) = A\cos\vartheta_0^{(1)} + B\sin\vartheta_0^{(1)} = A\cos\vartheta_0^{(1)}\left(1 + \frac{B}{A}\tan\vartheta_0^{(1)}\right) =$$

$$= A \underbrace{\cos\vartheta_0^{(1)}}_{\frac{1}{\sqrt{1+B^2/A^2}}} \left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right) = A\sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\tilde{T}}{V''(\vartheta_0^{(1)})}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{\sqrt{A^2+B^2}}}}$$

PERIODE PETITES OSCILLATIONS

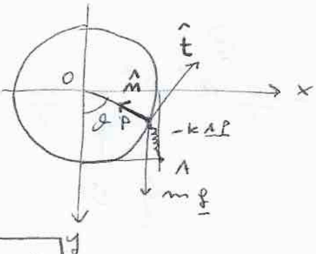
$\tilde{T} = mR^2$

$V''(\vartheta_0^{(1)}) = \sqrt{A^2+B^2}$

Q8) CALCUL des FORCES de CONTRAINTE

PFD : $m\underline{a} = \underline{f} + \underline{R}$

$\uparrow$ RÉACTION : $\underline{R} = (R_n, R_t)$



Dans notre cas : $R_t = 0$ (absence de frottement)

$\Rightarrow \underline{R} = (R_n, 0)$ est la RÉACTION $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ PROJECTION sur $\hat{n}$: $m a_n = f_n + R_n \Rightarrow \boxed{R_n = m a_n - f_n}$

$\underline{a} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ ACCÉLÉRATION

$$\begin{cases} x = R\sin\vartheta \\ y = R\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ \dot{y} = -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = R\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta \\ \ddot{y} = -R\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - R\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta \end{cases}$$

$\hat{n} = (n_x, n_y) = (-\sin\vartheta, -\cos\vartheta)$ DIRECTION NORMALE

$\Rightarrow a_n = \underline{a}\cdot\hat{n} = a_x n_x + a_y n_y =$

$= \cancel{-R\ddot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta} + R\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta +$

$+ \cancel{R\ddot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta} + R\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta = R\dot{\vartheta}^2$

$\underline{f} = -k\underline{AP} + m\underline{g}$ FORCE

$\underline{AP} = (x - x_A, y - y_A) = (R\sin\vartheta - R, R\cos\vartheta - R)$ $\Rightarrow$

$\underline{g} = (0, g)$

$\Rightarrow \underline{f} = \left(-k(R\sin\vartheta - R), -k(R\cos\vartheta - R) + mg\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n = kR\sin^2\vartheta - kR\sin\vartheta + kR\cos^2\vartheta - kR\cos\vartheta - mg\cos\vartheta =$

$= kR - kR(\sin\vartheta + \cos\vartheta) - mg\cos\vartheta$

$\Rightarrow R_n = m a_n - f_n = \underbrace{mR\dot{\vartheta}^2}_{= \frac{2T}{R}} - f_n = \frac{2E}{R} - \frac{2V}{R} - f_n \Rightarrow$

$\frac{2T}{R} = \frac{2}{R}(E - V)$

$$\rightarrow R_n = \frac{2E}{R} + \underbrace{\frac{2}{R}(mg + kR)R\cos\vartheta + \frac{2}{R}kR^2\sin\vartheta}_{-\frac{2}{R}V} * - f_n =$$

$$= \frac{2E}{R} + 2mg\cos\vartheta + 2kR\cos\vartheta + 2kR\sin\vartheta +$$

$$- kR + kR\sin\vartheta + kR\cos\vartheta + mg\cos\vartheta =$$

$$= \frac{2E}{R} + 3mg\cos\vartheta + 3kR(\cos\vartheta + \sin\vartheta) - kR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R_n = \frac{2E}{R} - kR + 3(mg + kR)\cos\vartheta + 3kR\sin\vartheta}$$

RÉACTION NORMALE

Elle dépend des conditions initiales à travers l'énergie totale E.