UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

# TD n°5 : Application du formalisme de Lagrange : équilibre, stabilité, petites oscillations

### Durée : 4 heures

## Exercice 1

On considère le système représenté dans la Fig. 1. Un point matériel $P$ de masse $m$ est contraint de se déplacer sur une circonférence de rayon $R$ et centre $O$ dans le champ de la pesanteur $\boldsymbol{g}$. Le point $P$ étant aussi relié à travers un ressort (ayant longueur au repos nulle) au point fixe $A$ de coordonnées $(x_A, y_A) = (R, R)$, est aussi soumis à une force de rappel élastique linéaire, de constante $k$. Le référentiel $(O, x, y)$ est supposé inertiel. On admettra, enfin, que la force de frottement entre le point matériel et la circonférence est nulle.

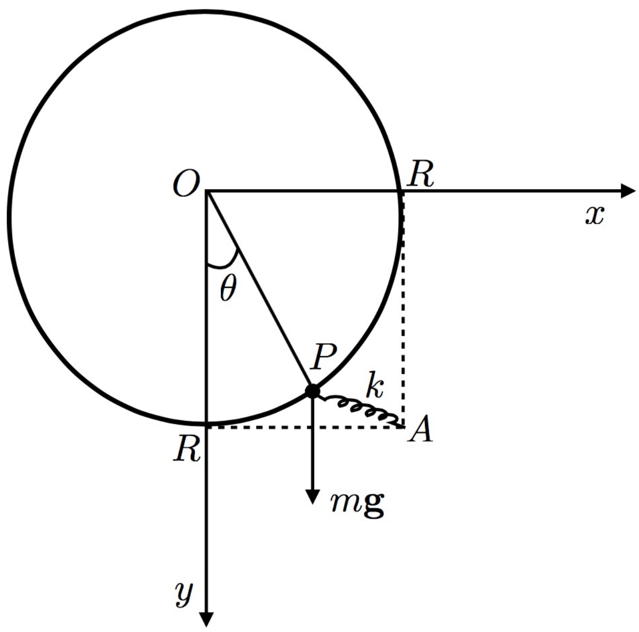


FIGURE 1 – Point matériel se déplaçant sur une circonférence sous l'action de la pesanteur et d'une force de rappel élastique.

### Lagrangien et équations du mouvement

Q1) Donner les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du lagrangien du point $P$ en fonction de l'angle $\theta$ (et de ses dérivées par rapport au temps).

Q2) Ecrire l'équation du mouvement (équation de Lagrange) pour ce problème.

## Equilibre et stabilité

Q3) Déterminer la condition satisfaite par les positions d'équilibre. Combien de telles positions existent ? Dans quels quadrants se trouvent elles ? Ici on pourra appeler $A = (mg + kR)R$ et $B = kR^2$ les constantes multiplicatives qui figurent dans l'expression de l'énergie potentielle.

Q4) Discuter la stabilité des positions d'équilibre trouvées.

## Analyse qualitative du mouvement

Q5) Le graphique de l'énergie potentielle $V = V(\theta)$ est présenté dans la Fig. 2.

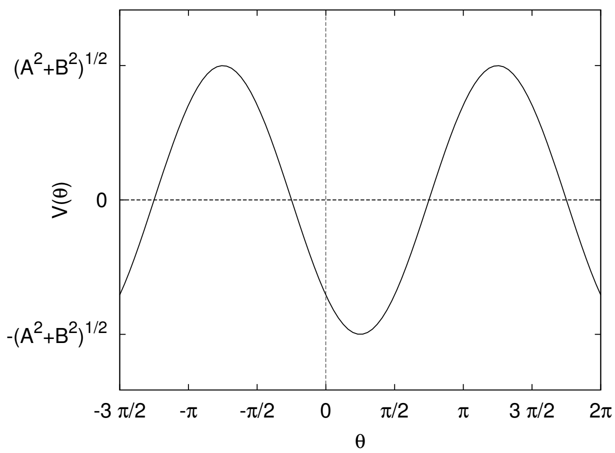


FIGURE 2 – Energie potentielle.

Discuter les propriétés qualitatives du mouvement pour les valeurs suivantes de l'énergie totale $E$ :

(a) $E < V_{min} = -\sqrt{A^2 + B^2}$,
(b) $E = E_1 = V_{min}$,
(c) $E = E_2$, avec $V_{min} < E_2 < V_{max}$, où $V_{max} = \sqrt{A^2 + B^2}$,
(d) $E = E_3 = V_{max}$
(e) $E > V_{max}$.

Pour chaque cas, préciser si le mouvement est physiquement possible, comment on pourrait le réaliser (en fonction du choix de la condition initiale $\theta(0)$) et le type de trajectoire qui en résulterait.

Pour le cas (d), sachant que le temps pour aller de la position $\theta(0)$ à la position $\theta(\mathcal{T})$ est donné par :

$$\mathcal{T} = \int_{\theta(0)}^{\theta(\mathcal{T})} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}[E - V(\theta)]}},$$

sauriez-vous dire (sans calculer l'intégrale) quel est le temps nécessaire pour atteindre la position d'équilibre instable à partir d'une condition initiale générique $\theta(0)$ ?

### Petites oscillations

Q6) A travers un développement de Taylor de l'énergie potentielle autour de la position d'équilibre stable, établir l'équation de Lagrange pour les petites oscillations ; ici on notera $\eta(t) = \theta(t) - \theta_0^{(1)}$ le petit déplacement et $\theta_0^{(1)}$ l'angle correspondant à la position d'équilibre stable.

A quel système simple correspond l'équation obtenue ? Donner l'expression de la pulsation associée au mouvement oscillatoire.

Q7) A partir du résultat précédent, calculer la période des petites oscillations.

### Calcul des forces de contrainte

Q8) Finalement, on se propose de calculer la force due à la contrainte, c'est à dire la réaction $\boldsymbol{R} = (R_n, R_t)$ (où $R_n$ et $R_t$ sont, respectivement, les composantes dans la direction normale $\hat{\boldsymbol{n}}$ et tangentielle $\hat{\boldsymbol{t}}$), à partir de l'équation de Newton (PFD) :

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{R}.$$

Dans le PFD, clairement, $\boldsymbol{a}$ dénote l'accélération du point $P$ et $\boldsymbol{f}$ la résultante des forces appliquées.

Pour effectuer ce calcul il est pratique d'exprimer la position du point $P$ (et, donc, son accélération), ainsi que les vecteurs unitaires $\hat{\boldsymbol{n}}$ et $\hat{\boldsymbol{t}}$ et la résultante $\boldsymbol{f}$, en coordonnées cartésiennes, puis projeter le PFD dans les directions normale et tangentielle.

Dire si la réaction normale $R_n$ dépend des conditions initiales et pourquoi.