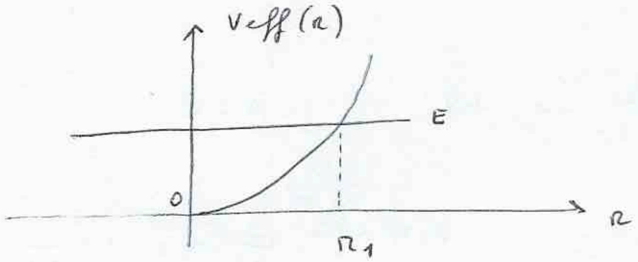
• EX. 1 :

$$f = -kr \; ; \; V = \frac{1}{2} k r^2 \; ; \; V_{eff} = \frac{1}{2}\frac{l^2}{m r^2} + V \; ; \; l : \text{MOMENT ANGULAIRE (MODULE)}$$

EQUATIONS MOUVEMENT
$$\begin{cases} m r^2 \dot{\theta} = l & (\text{éq. pour } \theta) \\ m\ddot{r} - \dfrac{l^2}{m r^3} = f(r) & (\text{éq. pour } r) \end{cases}$$

Q1) $l = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \text{const} \Rightarrow$ MOUVEMENT RECTILIGNE
$\theta = \theta_*$

Q2) $V_{eff} = V = \frac{k}{2} r^2$ $(l = 0)$



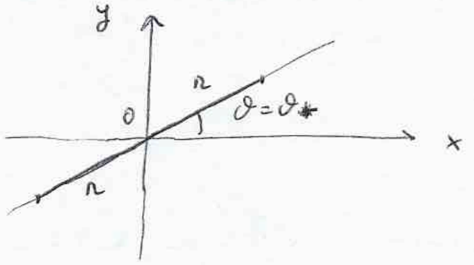
$\forall E > 0$: MOUVEMENT LIMITÉ $(0 \leq r \leq r_1)$

$m\ddot{r} = -kr \Rightarrow$ MOUVEMENT HARMONIQUE (oscillations)

$r = r_1 \Rightarrow$ INVERSION

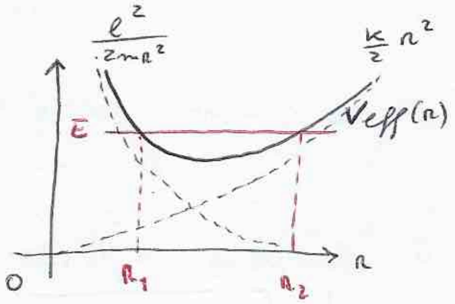
$E = V_{eff} \Rightarrow T = 0 \Rightarrow v = 0$

Q3) Le mouvement passe par le centre de force :



Q4) $l \neq 0$

$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m r^2} =$
$= \frac{1}{2} k r^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{m r^2}$



$r \to 0 : V_{eff} \simeq \frac{l^2}{2 m r^2}$

$r \to \infty : V_{eff} \simeq \frac{k}{2} r^2$

Q5) MOUVEMENT POSSIBLE pour $E \geq \min(V_{eff})$

Car $E = \underbrace{\frac{m v_r^2}{2}}_{T_r} + V_{eff} \Rightarrow v_r^2 = \frac{2}{m}(E - V_{eff})$ $\quad v_r = \dot{r}$

Donc, il faut que $E \geq V_{eff}$ pour que $v_r \in \mathbb{R}$

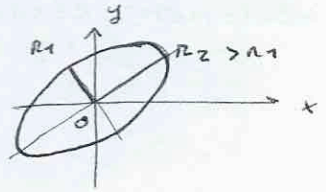
$\forall E > \min(V_{eff}) \Rightarrow$ MOUVEMENT LIMITÉ avec $r_1 \leq r \leq r_2$ (•)

Q6) Le mouvement ne passe pas par le centre de force.

$\underline{f} = -k\underline{r}$ FORCE ELASTIQUE $\Rightarrow$ ORBITE FERMÉE (TH. BERTRAND)

$\Updownarrow$

$\begin{cases} f_x = -kx & \Rightarrow \text{OSCILLATIONS le long } x \\ f_y = -ky & \Rightarrow \text{OSCILLATIONS le long } y \end{cases}$ $\Rightarrow$ AVEC MÊME FRÉQUENCE

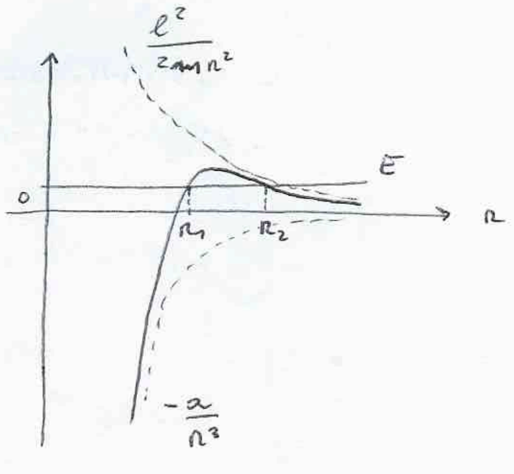


ORBITE ELLIPTIQUE

• EX.2

$f(r) = -\dfrac{3a}{r^4}$; $V = -\dfrac{a}{r^3}$; $V_{eff} = \dfrac{\ell^2}{2mr^2} + V$; $a > 0$

Q1)



$V_{eff}(r) = -\dfrac{a}{r^3} + \dfrac{\ell^2}{2mr^2}$

$r \to 0$: $V_{eff} \simeq -\dfrac{a}{r^3} < 0$

$r \to \infty$: $V_{eff} \simeq \dfrac{\ell^2}{2mr^2} > 0$

r_0 : VALEUR INITIALE de la DISTANCE du CENTRE de FORCE

$r_0 < r_1 \Rightarrow$ $0 < r \leq r_1$ $\Rightarrow$ MOUVEMENT LIMITÉ (inversion en r_1 et mouvement qui $\xrightarrow[t\to\infty]{}$ vers 0)

$r_0 > r_2 \Rightarrow$ $r \geq r_2$ $\forall t$ $\Rightarrow$ MOUVEMENT ILLIMITÉ (inversion en r_2 et mouvement qui $\xrightarrow[t\to\infty]{}$ ∞)

$r_1 < r_0 < r_2 \Rightarrow$ $E < V_{eff}$ $\Rightarrow$ PHYSIQUEMENT IMPOSSIBLE

car $v_r^2 = \dfrac{2}{m}(E - V_{eff}) \in \mathbb{R}$