UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°4 : Forces centrales et propriétés qualitatives des trajectoires

Durée : 1 heure

Nous souhaitons déterminer les propriétés qualitatives des orbites (ou trajectoires) dans deux problèmes caractérisés par des forces centrales $f = f(r)$, correspondants à des potentiels $V = V(r)$.

On rappel que, pour toute force centrale, le potentiel efficace s'écrit $V_{eff} = V + l^2/(2mr^2)$, où l est le module du moment angulaire et m la masse. Comme d'habitude dans le cas de forces centrales, ici nous travaillons dans le référentiel du centre de masse ; m correspond, donc, à la masse réduite. Les équations du mouvement pour ce problème sont :

$$mr^2\dot{\theta} = l\,; \quad m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r).$$

Exercice 1 : Force de rappel élastique linéaire

On considère la force $f(r) = -kr$ correspondant au potentiel $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, où k est la raideur d'un ressort.

Initialement on supposera que le moment angulaire est nul.

Q1) En regardant les équations du mouvement, dire de quel type de mouvement il s'agit (trajectoire fermée, ouverte, rectiligne...).

Q2) En utilisant l'expression du potentiel efficace et la méthode graphique, décrire le mouvement en fonction de la valeur de l'énergie totale E.

Q3) Les trajectoires, passent elles par le centre de force ?

Maintenant on considère le cas de moment angulaire non nul $l \neq 0$.

Q4) Tracer le graphique du potentiel efficace.

Q5) Quelle est la condition à satisfaire pour que le mouvement soit physiquement réalisable ? En utilisant l'expression du potentiel efficace et la méthode graphique, décrire ensuite le mouvement en fonction de la valeur de l'énergie totale E.

Q6) Les trajectoires, passent elles par le centre de force ? Sauriez vous dire à quel type d'orbites elles correspondent ?

Exercice 2 : Potentiel cubique

Considérer la force $f(r) = -\frac{3a}{r^4}$, avec $a > 0$, correspondant au potentiel attractif $V(r) = -\frac{a}{r^3}$.

Q1) En utilisant l'expression du potentiel efficace et la méthode graphique, décrire le mouvement en fonction de la valeur initiale $r(0) = r_0$ de la distance du centre de force.