UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°3 : Formalisme lagrangien dans des référentiels non inertiels

Durée : 3 heures

Compléments de cours

Pour établir les équations du mouvement dans un référentiel non inertiel (ou non galiléen) il est nécéssaire de tenir compte aussi des forces fictives (ou forces d'inertie). Pour un système de N particules les équations du mouvement deviennent alors : $m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{f}_i^f$ $(i = 1, ..., N)$, où $\boldsymbol{f}_i$ sont les forces physiques appliquées. Les forces fictives sont données par

$$\boldsymbol{f}_i^f = -m_i \boldsymbol{a}^{(e)} - 2m_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i - m_i \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}_i - m_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i),$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire du référentiel par rapport à un référentiel galiléen. Dans l'expression de $\boldsymbol{f}_i^f$ on peut reconnaître les contributions dues à l'accélération de l'origine $\boldsymbol{a}^{(e)}$, à l'accélération de Coriolis, à la variation de $\boldsymbol{\omega}$ au cours du temps et à l'accélération centrifuge.

En généralisant le calcul des travaux virtuels pour tenir compte des forces inertielles, il est possible d'écrire les équations de Lagrange dans le référentiel non inertiel dans la forme suivante [1] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + Q_j^{(e)} + Q_j^{(cor)} + Q_j^{(cent)}. \tag{1}$$

Dans l'Eq. (1), T est l'énergie cinétique et Q_j la force (physique) généralisée. Les forces inertielles généralisées $Q_j^{(e)}$ (accélération de l'origine), $Q_j^{(cor)}$ (Coriolis), $Q_j^{(cent)}$ (centrifuge) sont respectivement données par les expressions suivantes :

$$Q_j^{(e)} = -M\boldsymbol{a}^{(e)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q_j} \tag{2}$$

$$Q_j^{(cor)} = \frac{\partial(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L})}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L})}{\partial \dot{q}_j} \tag{3}$$

$$Q_j^{(cent)} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)^2\right]. \tag{4}$$

Dans les expressions ci-dessus, $M = \sum_i m_i$ est la masse totale du système, $\boldsymbol{R} = (\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i)/M$ la position de son centre de masse, $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$ son moment angulaire par rapport à un point de l'axe de rotation, dans le référentiel choisi.

1. Pour une dérivation des équations de Lagrange dans ce cas, voir C. Gignoux, B. Silvestre-Brac *Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics*, Springer (2009).

Dans les exercices suivants nous nous proposons d'appliquer le formalisme lagrangien à la dynamique de deux systèmes simples dans des référentiels non inertiels.

Exercice 1 : Pendule simple en translation

On considère un pendule simple (fil inextensible et de masse négligeable) de longueur l et masse m dans le champ de la pesanteur $\boldsymbol{g}$ suspendu à un point A en mouvement vertical, dans la direction de $\boldsymbol{g}$. On dénotera $h(t)$ la distance entre le point A et l'origine O d'un référentiel inertiel et on orientera les axes verticaux dans la direction de $\boldsymbol{g}$.

Q1) En supposant, pour commencer, que le référentiel ayant pour origine A soit inertiel, donner les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle, du lagrangien.

Q2) Déterminer ensuite les équations de Lagrange.

Q3) En supposant maintenant que le référentiel du pendule soit en translation verticale avec $OA = h(t)$, donner les expressions des forces inertielles généralisées.

Q4) Déterminer les équations de Lagrange pour le pendule dans ce cas de référentiel en translation.

Q5) Déterminer les positions d'équilibre ($\ddot{\theta} = 0$) dans l'hypothèse que l'accélération $\ddot{h}$ du référentiel soit constante pour (i) $\ddot{h} = 0$, (ii) $0 < \ddot{h} < g$, (iii) $\ddot{h} = g$.

Exercice 2 : Oscillateur harmonique en rotation uniforme

On considère un point matériel de masse m dans un plan horizontal (O, x, y). Un ressort élastique de raideur k relie le point matériel à l'origine O du référentiel. Le référentiel est un rotation uniforme d'axe (O, z).

Q1) Donner les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de la force (physique) généralisée.

Q2) Donner les expressions des forces inertielles généralisées.

Q3) Déterminer les équations de Lagrange dans le référentiel en rotation.