• EX. 1 :

M : MASSE TOTALE CORDE

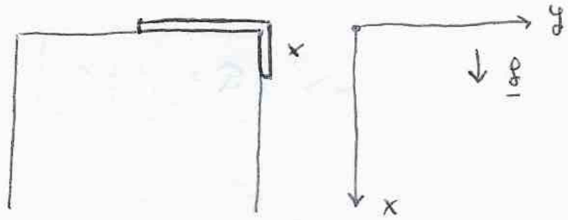
μ : MASSE LINEÏQUE (masse par unité de longueur)

$\mu = \frac{M}{L}$ (UNIFORME)

Q1)

COORDONNÉE GÉNÉRALISÉE : $x \equiv q$

CORDE NON ÉLASTIQUE $\Rightarrow v_\alpha = \dot{x} \; \forall \alpha$
(tous les points de la corde ont la même vitesse)



$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{\dot{x}^2}{2} \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha\right)}_{M = \mu L} = \frac{1}{2} \mu L \dot{x}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \mu L \dot{x}^2}$$

Q2)

PRINCIPE D'ALEMBERT : $\sum_\alpha \left(\underline{F}_\alpha - \dot{\underline{p}}_\alpha\right) \cdot \delta \underline{r}_\alpha = 0$

$\delta W = \sum_\alpha \underline{F}_\alpha \cdot \delta \underline{r}_\alpha$ TRAVAIL VIRTUEL

FORCES APPLIQUÉE

DÉPLACEMENT VIRTUEL

$$\delta W = \sum_1^n{}_j \, Q_j \, \delta q_j$$

$Q_j = \sum_1^N{}_i \, \underline{F}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$ FORCES GÉNÉRALISÉES

$\Rightarrow$ EQ. LAGRANGE (MOUVEMENT) : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$

Dans notre cas:

PARTIE HORIZONTALE CORDE: POIDS de la CORDE / REACTION NORMALE de la TABLE $\}$ $\delta W = 0$

car FORCES $\perp$ DÉPLACEMENT

$$\Rightarrow \delta W = \mu x \underline{g} \cdot \underline{\delta x} = \boxed{\mu g x \, \delta x = \delta W}$$

TRAVAIL VIRTUEL (dû au poids de la partie suspendue de la corde)

$$\Rightarrow \boxed{Q = \mu g x} \quad ; \quad \delta W = Q \, \delta x$$

FORCE GÉNÉRALISÉE

$$\Rightarrow \text{EQ. MOUVEMENT :} \quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)}_{\mu L \ddot{x}} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{= 0} = \underbrace{Q}_{= \mu g x} \Rightarrow$$

$(T$ indép. $x)$

$$\Rightarrow \cancel{\mu} L \ddot{x} = \cancel{\mu} g x \quad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \ddot{x} = \omega^2 x \\ \omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \end{array}}$$

EQ. MOUVEMENT

Q3) $\ddot{x} = \omega^2 x \quad ; \quad \omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \quad ; \quad$ C.I. $\begin{cases} x(0) = \ell \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

$$\text{C.I.:} \begin{cases} \ell = x(0) = A + B \\ 0 = \dot{x}(0) = A\omega - B\omega \end{cases} \Rightarrow B = A \Rightarrow 2A = \ell \Rightarrow A = \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\ell}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = \ell \cosh(\omega t) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x(t) = \ell \cosh(\omega t) \\ \omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \end{array}}$$

SOLUTION EQ. MOUVEMENT

Q4)

FORCES SUR LA PARTIE HORIZONTALE

REACTION : $\underline{R} = (R_h, R_v)$

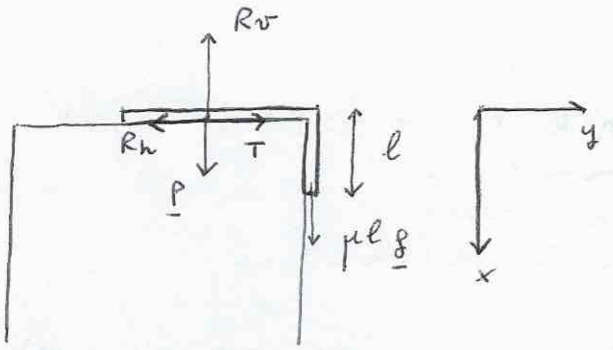
HORIZONTALE : FROTTEMENT

VERTICALE : REACTION NORMALE

TENSION CORDE : $\underline{T}$ (due à la partie suspendue)

POIDS CORDE : $\underline{P}$

ℓ : PARTIE INITIALEMENT SUSPENDUE



ÉQUILIBRE :

(v) : $P - R_v = 0 \Rightarrow R_v = P$

(h) : $-R_h + T = 0 \Rightarrow T = R_h$

$\Downarrow$

$$R_v = P = \mu g (L - \ell)$$

$$R_h = T = \mu g \ell$$

CONDITION ADHÉRENCE : $R_h \leq f R_v \Rightarrow$

f : COEFF. ADHÉRENCE et FROTTEMENT

$$\Rightarrow \cancel{\mu g} \ell \leq f \cancel{\mu g} (L - \ell) \Rightarrow \boxed{\ell_0 = \frac{f}{1+f} L}$$

LONGUEUR CRITIQUE

$\ell \leq \ell_0 \Rightarrow$ ADHÉRENCE

$\ell > \ell_0 \Rightarrow$ GLISSEMENT

Q5)

EN. CINÉTIQUE : $T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{\mu L}{2} \dot{x}^2$ (comme dans le cas précédent)

TRAVAIL VIRTUEL : $\delta W = \delta W_{\substack{\text{POIDS} \\ \text{PARTIE} \\ \text{VERT.}}} + \delta W_{R_h}$

$R_v, P \rightarrow \delta W = 0$ car FORCES $\perp$ DÉPLACEMENT

$T \rightarrow \delta W = 0$ " FORCE INTERNE

$$\Rightarrow \delta W = \mu g x \, \delta x \underbrace{- R_h \, \delta x}_{\substack{R_h \text{ opposée} \\ \text{au déplacement}}} = (\mu g x - R_h) \, \delta x$$

GLISSEMENT : $R_h = f R_v \Rightarrow R_h = f \mu g (L - \cancel{x}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta W = [\mu g x - f \mu g (L - \cancel{x})] \, \delta x =$$

$$= \mu g \left[(1+f) x - f L \right] \delta x$$

$$\Rightarrow Q = \mu g \left[(1+f) x - f L \right]$$ FORCE GÉNÉRALISÉE

EQ. MOUVEMENT : $$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right)}_{\mu L \dot{x}} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{= 0} = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu L \ddot{x} = \mu g \left[(1+f) x - f L \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{L} \left[(1+f) x - f L \right] \underset{\uparrow}{=} \frac{g}{L} (1+f) (x - l_0) \Rightarrow$$

$f L = (1+f) \, l_0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \omega_d^2 (x - l_0), \text{ avec : } \omega_d = \sqrt{\frac{g(1+f)}{L}}}$$ EQ. MOUVEMENT

Q6)

$$\ddot{x} = \omega_d^2 (x - l_0) \quad ; \quad \omega_d = \sqrt{\frac{g(1+f)}{L}} \quad ; \quad \text{C.I.} \begin{cases} x(0) = l \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$y \equiv x - l_0$

$l_0 = \text{cst} \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{y} = \omega_d^2 y$ (même forme que dans le cas précédent)

$$\Rightarrow y(t) = A e^{\omega_d t} + B e^{-\omega_d t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = l_0 + y(t) = l_0 + A e^{\omega_d t} + B e^{-\omega_d t}$$

$$\text{C.I.} : \begin{cases} l = x(0) = l_0 + A + B \\ 0 = \dot{x}(0) = A\omega_d - B\omega_d \end{cases} \Rightarrow B = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A + l_0 = l \Rightarrow A = \frac{l - l_0}{2} \Rightarrow$$

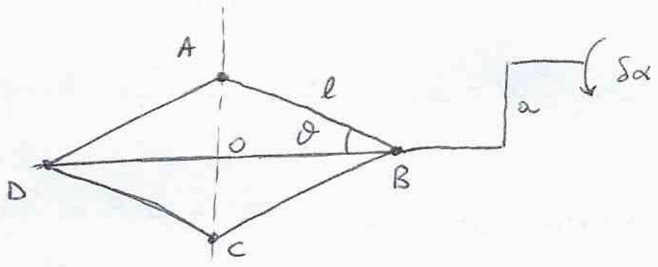
$$\Rightarrow x(t) = l_0 + \frac{l - l_0}{2}\left(e^{\omega_d t} + e^{-\omega_d t}\right) = l_0 + (l - l_0)\cosh(\omega_d t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= l_0 + (l - l_0)\cosh(\omega_d t) \\ \omega_d &= \sqrt{\frac{g(1+f)}{L}} \end{aligned}}$$

SOLUTION
EQ. MOUVEMENT

• EX. 2 :

Q1)



CONFIGURATION SYSTÈME : donnée par α (angle entre la manivelle et la verticale)

et par la forme du losange : longueurs DB et AC.

1° CONTRAINTE HOLONOME : $l = \text{const}$; $l^2 = OA^2 + OB^2$

2° CONTRAINTE HOLONOME : RELATION entre α et DB :
(due à la tige filetée)

$$\delta\alpha = 2\pi \Rightarrow \delta DB = h$$

$\Rightarrow$ SEULEMENT α est NÉCESSAIRE ; 1 DEGRÉ de LIBERTÉ

Q2) $\delta\alpha$: DÉPLACEMENT VIRTUEL

$\delta x : \delta\alpha = h : 2\pi \Rightarrow \delta x = h\dfrac{\delta\alpha}{2\pi}$ DÉPLACEMENT HORIZONTAL correspondant (pour DB)

$OB = \dfrac{DB}{2} \Rightarrow \delta OB = \dfrac{\delta DB}{2} = \dfrac{\delta x}{2}$

$(OB = OD)$

si $\delta DB > 0$ (DB croît) $\Rightarrow \delta OA < 0$ (OA décroît)
pour que $OA^2 + OB^2 = l^2 = \text{const}$

$\Rightarrow \delta CA = 2\,\delta OA = -2\left(\dfrac{\delta x}{2}\right)/\tan\vartheta = -\delta x/\tan\vartheta \Rightarrow \boxed{\delta z = \delta CA = -\dfrac{h\,\delta\alpha}{2\pi\tan\vartheta}}$

$\uparrow$ (*)$_1$

[redacted]

Q3) PRINCIPE de D'ALEMBERT

FORCES :

POIDS en A $\Rightarrow \delta W_P = -P\,\delta z = \dfrac{Ph\,\delta\alpha}{2\pi\tan\vartheta}$

REACTION en C $\Rightarrow \delta W = 0$ car C ne bouge pas

FORCE F sur la MANIVELLE $\Rightarrow \delta W_F = -Fa\,\delta\alpha$
(pour maintenir l'équilibre la force doit être opposée à la rotation $\delta\alpha$ considérée précédemment).

$$\Rightarrow \delta W = \left[\frac{Ph}{2\pi\tan\vartheta} - Fa\right]\delta\alpha = Q_\alpha\,\delta\alpha$$ TRAVAIL VIRTUEL

$$Q_\alpha = \frac{Ph}{2\pi\tan\vartheta} - Fa$$ FORCE GÉNÉRALISÉE

ÉQUILIBRE : $\delta W = 0 \Rightarrow Q_\alpha = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{F} = \frac{2\pi a\tan\vartheta}{h}}$$

Pour que $\frac{P}{F} \to$ MAX : $a \to$ MAX
$h \to \min$

(*)1 $OA^2 = \ell^2 - OB^2$
$OA = \sqrt{\ell^2 - OB^2}$

$\delta OB = \dfrac{\delta x}{2}$

$$\delta OA = \frac{\partial OA}{\partial OB}\,\delta OB = -\frac{\cancel{2}\,OB}{\cancel{2}\underbrace{\sqrt{\ell^2 - OB^2}}_{OA}}\,\delta OB = -\underbrace{\left(\frac{OB}{OA}\right)}_{=\frac{1}{\tan\vartheta}}\delta OB = -\frac{\delta OB}{\tan\vartheta} = -\frac{\delta x}{2\tan\vartheta}$$

$$\Rightarrow \delta z = \delta CA = 2\,\delta OA =$$
$$= -\frac{\cancel{2}\,\delta x}{\cancel{2}\tan\vartheta} = -\frac{h\,\delta\alpha}{2\pi\tan\vartheta}$$

$\delta x = h\dfrac{\delta\alpha}{2\pi}$