

TD n°2 : Principe des travaux virtuels et équations de Lagrange

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Corde glissant sur une table

Une partie $L - l$ d'une corde de longueur L et ayant masse linéique constante μ est initialement au repos sur une table horizontale. La partie restante de la corde, de longueur l , est suspendue verticalement dans le champ de la pesanteur g .

Dans la suite on assumera que la vitesse initiale de la corde est nulle et que la partie suspendue reste toujours verticale.

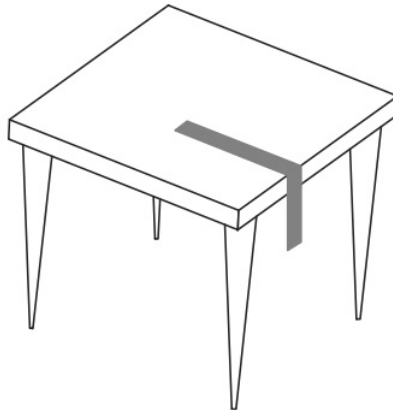


FIGURE 1 – Corde glissant sur une table.

Dans la première partie de l'exercice on néglige les forces de frottement.

Q1) Identifier une coordonnée généralisée et déterminer l'énergie cinétique de la corde.

Q2) A partir de l'analyse des forces réelles en présence, déterminer les travaux virtuels et les forces généralisées. Utiliser les expressions de ces dernières et de l'énergie cinétique pour dériver les équations de Lagrange.

Q3) Résoudre les équations du mouvement (ou de Lagrange).

Q4) On considère maintenant la présence d'une force de frottement entre la table et la corde, avec coefficient de frottement (et d'adhérence) f . Quelle est la longueur minimale l_0 permettant à la corde de glisser ?

Q5) Donner les équations de Lagrange pour ce cas.

Q6) Résoudre les équations du mouvement dans ce cas aussi.

Exercice 2 : Cric

Un cric est une machine conçue pour soulever des charges lourdes (Fig. 2). Il est composé de deux bases rigides (une au repos sur le sol, l'autre soutenant la charge, le poids de laquelle est P) ; elles forment un losange articulé de côté l , qui peut être déformé à travers une tige filetée de pas h contrôlée par une force F appliquée sur une manivelle ayant un bras de longueur a (l'axe du cric change sa longueur de h pour chaque révolution de la manivelle).

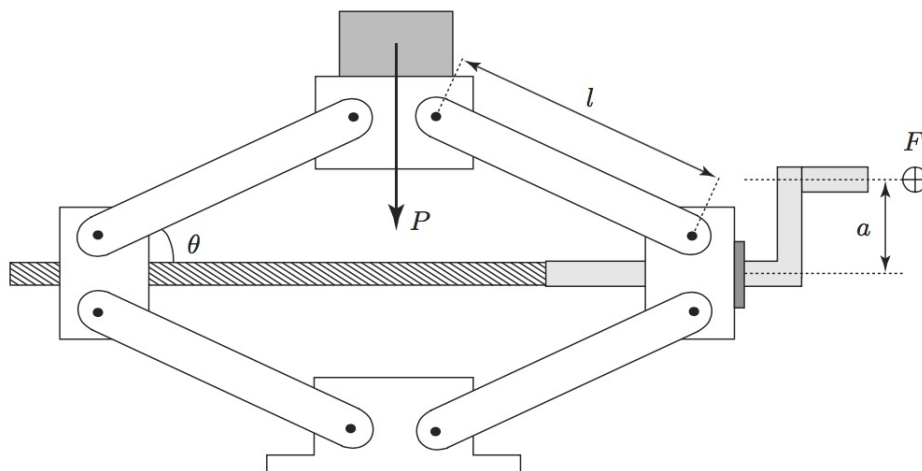


FIGURE 2 – Schématisation du fonctionnement d'un cric.

Q1) Examiner les contraintes imposées sur le système et montrer que ce dernier possède un seul degré de liberté. Quelle coordonnée généralisée vous semble la plus appropriée ?

Q2) Calculer la variation d'altitude de la charge en fonction du déplacement virtuel correspondant à une variation infinitésimale de l'angle α entre la manivelle et la direction verticale.

Q3) En utilisant le principe de d'Alembert, déduire la relation entre le poids de la charge et la force appliquée (sur la manivelle) en fonction des caractéristiques du cric et de l'angle θ entre le côté du losange et la tige filetée.