TD1

• EX. 1 :

$$1 \text{ PARTICULE} \begin{cases} \text{MASSE CONSTANTE} & (a) \\ \text{MASSE VARIABLE} & (b) \end{cases}$$

EQ. MOUVEMENT : $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$; $\underline{p} = m\dot{\underline{r}}$; $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$

(a) $m = \text{const}$

$$\dot{\underline{p}} = m\ddot{\underline{r}} \Rightarrow m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \Rightarrow \underbrace{\dot{\underline{r}} \cdot (m\ddot{\underline{r}})}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{m|\dot{\underline{r}}|^2}{2}\right)} = \underbrace{\dot{\underline{r}} \cdot \underline{F}}_{\underline{v}\cdot\underline{F}} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{v}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m|\dot{\underline{r}}|^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt}$$

$v = |\underline{v}|$

(b) $m = m(t)$

$$\dot{\underline{p}} = \underline{F}$$

$$\underbrace{\dot{\underline{p}} \cdot \underline{p}}_{} = \underline{F} \cdot \underline{p}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|\underline{p}|^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m^2v^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}(mT) \Rightarrow \boxed{\frac{d(mT)}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{p}}$$

• EX. 2 :

Q1) EQ. MOUVEMENT : $\underline{\dot{P}} = \underline{F}^{(e)}$ ← RESULTANTE des FORCES EXTERNES

CALCUL de $\underline{\dot{P}}$:

AU TEMPS t : $\underline{P}(t) = M(t)\,\underline{V}(t)$

" " $t+\Delta t$: $\underline{P}(t+\Delta t) = \underline{P}_F(t+\Delta t) + \underline{P}_G(t+\Delta t) =$

$$= \underbrace{\left[M(t) - \Delta m\right]\left[\underline{V}(t) + \Delta \underline{V}\right]}_{\underline{P}_F(t+\Delta t)} + \underbrace{\Delta m\, \underline{v}}_{\underline{P}_G(t+\Delta t)}$$

Δm : quantité de matière éjectée.

$$\underline{\dot{P}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{P}(t+\Delta t) - \underline{P}(t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

AVEC $\Delta t \to 0$

$$\Rightarrow \underline{\dot{P}} = M(t)\frac{\Delta \underline{V}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}\underline{V}(t) + \frac{\Delta m}{\Delta t}\underline{v} = M\underline{\dot{V}} - \dot{m}(\underline{V} - \underline{v})$$

à l'ordre le plus bas dans les quantités différentielles (on néglige $\Delta m \Delta \underline{V}$)

CONSERVATION MASSE : $\Delta m = -\Delta M \Rightarrow \dot{m} = -\dot{M} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\underline{\dot{V}} + \dot{M}(\underline{V} - \underline{v}) = \underline{F}^{(e)} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} M\underline{\dot{V}} - \dot{M}\underline{v}_R = \underline{F}^{(e)} \\ \underline{v}_R = \underline{v} - \underline{V} \end{array}}$$

VITESSE RELATIVE (de G par rapport à F)

Q2)

$$M\underline{\dot{V}} - \dot{M}\underline{v}_R = \underline{F}^{(e)} \Leftrightarrow M\underline{\dot{V}} = \underline{F}^{(e)} + \dot{M}\underline{v}_R \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} M\underline{\dot{V}} = \underline{F}^{(e)} + \underline{F}_P \\ \underline{F}_P = \dot{M}\underline{v}_R \end{array}}$$

"FORCE de POUSSÉE"

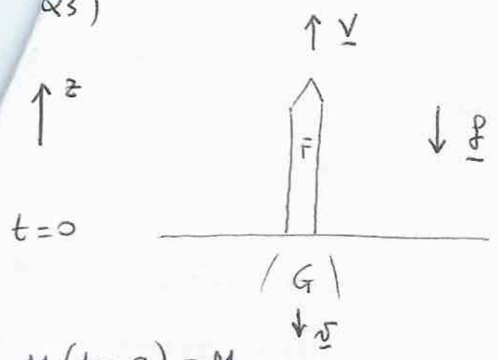
$\underline{A} = \underline{\dot{V}}$ (accélération)

↑ $\underline{F}_P$ en sens opposé à $\underline{F}^{(e)}$ pour que $\underline{A}$ soit en sens opposé à $\underline{F}^{(e)}$

↓ $\underline{v}_R$ $\dot{M} < 0$, car la fusée perd de la masse

$\underline{F}^{(e)} = M\underline{g}$

Q3)



$-\dot{M} = \mu > 0$ DÉBIT MASSIQUE

$M(t=0) = M_0$

$$M\dot{\underline{V}} - \underbrace{\dot{M}}_{= -\mu}\underline{v}_R = \underline{F}^{(e)} \Rightarrow M\dot{\underline{V}} + \mu \underline{v}_R = \underline{F}^{(e)} \quad ; \quad \underline{v}_R = \underline{v} - \underline{V}$$

$\Rightarrow$ PROJECTION SUR z : $M\dot{V}_z - \mu v_{Rz} = F_z^{(e)}$

$\underline{v}_R = -v_R \hat{z}$ $\quad$ $\hat{z}$: VECTEUR UNITAIRE DIRECTION z

$v_R = |\underline{v}_R| > 0$

$F_z^{(e)} = -Mg$ $\quad$ ici on néglige $\left\{\begin{array}{l}\text{le poids du gaz} \\ \text{les forces de frottement}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow M\dot{V}_z = -Mg + \mu v_{Rz}$$

$\dot{V}_z > 0$ $\Rightarrow$ $-Mg + \mu v_{Rz} > 0 \Rightarrow \boxed{\mu > \frac{Mg}{v_{Rz}}}$

pour que la fusée puisse partir vers le haut

Avec les valeurs (plutôt réalistes):

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 3\cdot 10^6 \text{ kg} \\ v_R = 3 \text{ km/s} \\ g \approx 10 \text{ m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu > \frac{3\cdot 10^6 \cdot 10}{3\cdot 10^3} \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m s}^{-1}} = 10^4 \text{ kg/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu > 10^4 \text{ kg/s} = 10 \ \frac{\text{tonnes}}{\text{s}}}$$

Q4)

$$M\frac{d\underline{V}}{dt} - \frac{dM}{dt}\underline{v}_R = M\underline{g} \qquad \text{EQ. MOUVEMENT}$$

$$M(t=0) = M_0 \; ; \; \underline{V}(t=0) = \underline{V}_0 = (0, 0, V_{z0})$$

$$z: \quad M\frac{dV_z}{dt} + \frac{dM}{dt} v_{Rz} = -Mg$$

$$\underline{v}_R = -v_R \hat{z} \qquad v_R = \text{const. par hypothèse}$$

$$v_{Rz} = v_R \; ; \; v_R > 0$$

En séparant les variables: $$\frac{dV_z}{dt} = -g - \frac{dM}{dt}\frac{v_R}{M}$$

$$dV_z = -g\,dt - v_R\frac{dM}{M}$$

intégrale entre $t=0$ et t: $$\int_0^t dV_z = -g\int_0^t dt - v_R\int_0^t \frac{dM}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_z(t) - V_{z0} = -gt - v_R \ln\frac{M(t)}{M_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_z(t) = V_{z0} + v_R \ln\left[\frac{M_0}{M(t)}\right] - gt}$$

$$M(t) < M_0 \Rightarrow \frac{M_0}{M(t)} > 1 \Rightarrow \ln\frac{M_0}{M(t)} > 0 \Rightarrow V_z(t) \uparrow \text{ avec } t \uparrow$$

(CONTRIBUTION du TERME $v_R \ln\left[\frac{M_0}{M(t)}\right]$)

$$t > 0, \; g > 0 \Rightarrow -gt < 0 \Rightarrow V_z(t) \downarrow \text{ avec } t \uparrow$$

(CONTRIBUTION du TERME $-gt$)

REMARQUE:

Pour connaître l'expression de $V_z(t)$ en fonction de t, il faut connaître la loi de variation de la masse $M(t)$ avec le temps t.

.3 :

(Q1) MACHINE D'ATWOOD

POULIE : SANS MASSE, SANS FROTTEMENT

Q1) SYSTÈME CONSERVATIF

CONTRAINTE HOLONOME et SCLÉRONOME (INDÉP. t)

Q2)

$N = 2$

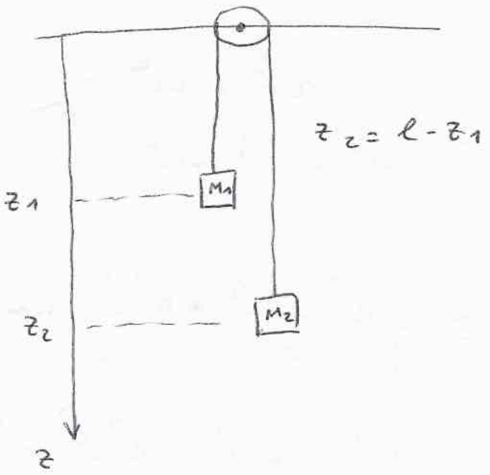
$$\left.\begin{array}{l} M_1,\ \underline{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ M_2,\ \underline{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{array}\right\} 3N = 6 \text{ coordonnées}$$

(i) $x_1 = \text{const}$

(ii) y_1

(iii) x_2

(iv) y_2



(v) $z_1 + z_2 = l$

l : longueur du fil

$3N - k = 6 - 5 = 1$ degré de liberté

$q_1 = z_1$

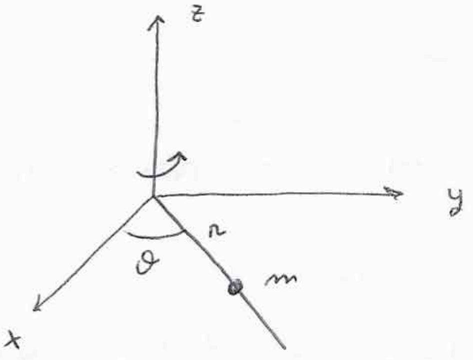
$[q_1] = [L]$

(b) BILLE SUR TIGE en ROTATION en ABSENCE de FORCES

Q3) (PAS de FORCES)

CONTRAINTE DÉP. du TEMPS t

$z = 0$



EQ. TRANSFORMATION:

$$\begin{cases} x = r(t)\cos\vartheta(t) \\ y = r(t)\sin\vartheta(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = r(t) \\ q_2 = \vartheta(t) \end{cases} \qquad [q_1] = [L]$$

q_2 : ADIMENSIONNEL

Q4)

ÉNERGIE CINÉTIQUE : $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\Big\{\dot{r}^2\cos^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta} +$$

$$+ \dot{r}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + \cancel{2r\dot{r}\sin\vartheta\cos\vartheta}\Big\} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right)$$

Q5)

si $\dot{\vartheta} = \omega = \text{const} \rightarrow$ 1 SEULE INCONNUE : $q_1 = r$

et $T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)$