UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne - travaux dirigés

TD n°1 : Systèmes à masse variable et coordonnées généralisées

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Variation de l'énergie cinétique d'une particule

Montrer que pour une particule ayant masse constante l'équation du mouvement implique l'équation différentielle suivante pour l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v},$$

alors que si la masse varie au cours du temps l'équation correspondante est

$$\frac{d(mT)}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}.$$

Exercice 2 : Etude du mouvement d'une fusée

La propulsion d'une fusée est assurée par un dispositif à réaction. Les gaz de combustion sont éjectés avec un débit massique $-\dot{M} = \mu > 0$, avec $M(t)$ la masse de la fusée au temps t. Dans la suite on notera $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{v}$ les vitesses (dans un référentiel fixe) de la fusée et des gaz, respectivement, et $\boldsymbol{v}_R$ la vitesse des gaz par rapport à la fusée.

Q1) En considérant la quantité de mouvement du système "fusée + gaz éjecté", déterminer l'équation du mouvement de la fusée. Ici on négligera les forces de frottement.

Q2) Donner l'expression de la "force de poussée" agissant sur la fusée.

Q3) On considère une fusée de masse initiale M_0 et initialement au repos en position verticale sur une base de lancement, dans le champ de la pesanteur $\boldsymbol{g}$. Suite au démarrage des moteurs, les produits de la combustion sont éjectés à un taux constant μ à la vitesse (relative à la fusée) $\boldsymbol{v}_R$. Trouver la condition sur μ pour que la fusée puisse quitter la base.
Calculer la valeur numérique de μ pour $M_0 = 3000$ tonnes, $v_R = 3$ km/s, $g = 10$ m/s^2.

Q4) A partir de l'équation du mouvement, calculer la vitesse $\boldsymbol{V}(t)$ au temps t d'une fusée se déplaçant vers le haut dans le champ de la pesanteur $\boldsymbol{g}$ et ayant masse initiale M_0 et vitesse initiale $\boldsymbol{V}_0 = (0, 0, V_{z0})$. Ici on supposera la vitesse $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$ constante. Discuter les rôles du terme lié à la variation de masse et de l'accélération de la gravité.

Exercice 3 : Coordonnées généralisées

(a) Machine d'Atwood

La machine d'Atwood (Fig. 1) est un appareil conçu pour l'étude de la chute libre. Sur une poulie, un fil relie deux masses m_1 et m_2 soumises à l'action de la pesanteur. Ici on négligera la masse de la poulie et toute force de frottement.

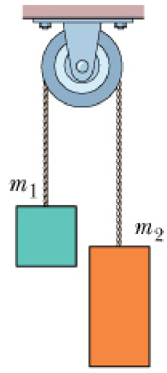

FIGURE 1 – Machine d'Atwood

Q1) Dire si le système est conservatif et pourquoi. Préciser aussi la nature des contraintes imposées sur le système constitué par les deux masses.

Q2) Déterminer le nombre de degrés de libertés du système, les coordonnées généralisées et leurs dimensions physiques.

(b) Bille sur tige en rotation en absence de forces

Considérer le mouvement d'une bille de masse m sur une tige rigide en rotation sur un plan, autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, en absence de forces.

Q3) Dire si, en générale, la contrainte dépend du temps et écrire les équations de la transformation permettant de relier les coordonnées cartésiennes aux coordonnées généralisées.

Q4) Calculer l'énergie cinétique de la bille (en fonction des coordonnées généralisées).

Q5) Si la tige tourne à vitesse angulaire constante, combien de variables sont inconnues ? Donner l'expression de l'énergie cinétique pour ce cas.