C5 : ÉLÉMENTS de THÉORIE DES PETITES OSCILLATIONS

Le formalisme de Lagrange se prête particulièrement bien au traitement des petites oscillations, c'est à dire de faible amplitude, au voisinage d'une position d'équilibre.

EXEMPLES D'APPLICATIONS : Acoustique, spectres moléculaires, vibrations de mécanismes, circuits électriques couplés.

Pour la FORMULATION du PROBLÈME, on commencera avec le cas simple d'un système à 1 degré de liberté, puis on l'étendra au cas d'un système à n degrés de liberté.

Dans le cadre de ce problème, on s'intéresse aux { SYSTÈMES CONSERVATIFS, OÙ $V = V(\vec{r})$; CONTRAINTES INDÉPENDANTES DU TEMPS (EXPLICITEMENT) }

① SYSTÈMES À 1 DEGRÉ DE LIBERTÉ

1 coordonnée généralisée : $q = q(t)$

pour simplicité : $[q] = [L]$

EN. CINÉTIQUE : $T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

EQ. LAGRANGE : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$, avec $L = T - V$ et $V = V(q)$

$$\Updownarrow$$

$$m\ddot{q} = -\frac{dV}{dq}$$

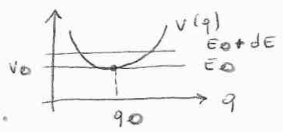
- POSITION D'ÉQUILIBRE : $q = q_0$

$V(q_0)$ est EXTRÉMAL : $\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$

- STABILITÉ :

Si on donne au système une vitesse initiale $\dot{q}(0)$ lorsqu'il est placé en $q = q_0$, va-t-il s'éloigner ou revenir vers q_0 ?

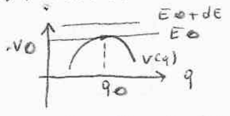
$V_0 = V(q_0)$ MINIMUM $\Rightarrow$ STABLE



On suppose que le système est perturbé à travers une augmentation dE d'énergie au dessus de son énergie d'équilibre. Si V_0 est un MIN. $\Rightarrow$ Toute déviation provoque une augmentation de V. À cause de la conservation de l'énergie, donc, les vitesses doivent diminuer et, finalement arriver à zéro $\Rightarrow$ le mouvement est limité.

$E_0 \to E_0 + dE \Rightarrow V\uparrow \Rightarrow T\downarrow \Rightarrow v\downarrow \Rightarrow$
$\Rightarrow$ MOUVEMENT LIMITÉ

$V_0 = V(q_0)$ MAXIMUM $\Rightarrow$ INSTABLE



D'autre part, si V diminue à cause d'une déviation de la condition d'équilibre, l'énergie cinétique et les vitesses augmentent de manière indéfinie, ce qui correspond à un mouvement illimité.

$E_0 \to E_0 + dE \to$ MOUVEMENT ILLIMITÉ

Un peu plus formellement ...

$\eta = q - q_0$ PETIT DÉPLACEMENT ; $q = q_0 \Rightarrow \eta = 0$

$q = q_0 + \eta$

$\Rightarrow$ DÉVELOPPEMENT de TAYLOR autour de $\eta = 0$, au 2° ORDRE car $\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_0} = \left.\frac{dV}{d\eta}\right|_0 = 0$

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0}\eta^2 + O(\eta^3)$$

$\dot{q} = \frac{d}{dt}(q_0 + \eta) = \dot{\eta}$ (q_0 = const)

EN. POT.: $V(q) \simeq V(q_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0}}_{\text{const.}}\eta^2$; $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2$ EN. CIN.

$V(q_0)$: const. $\to 0$

$\Rightarrow \boxed{V(q) \simeq \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0}\eta^2}$ (i) $\boxed{T = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2}$ (ii)

(i) et (ii): η joue le rôle d'une nouvelle coordonnée généralisée

$\Rightarrow$ EQ. LAGRANGE (LINÉARISÉE): $\boxed{m\ddot{\eta} = -\frac{dV}{d\eta} = -\left.\frac{d^2V}{d\eta^2}\right|_0 \eta}$

$L = T - V$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$

$\left.\frac{d^2V}{d\eta^2}\right|_0 = \left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0}$

(a) $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} > 0 \Rightarrow$ EQ. <u>STABLE</u>

$\omega^2 \equiv \frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} \Rightarrow \ddot{\eta} = -\omega^2\eta$ OSCILLATEUR HARMONIQUE

SOLUTION: $\eta(t) = a\cos(\omega t + \phi) = b e^{i\omega t} + c e^{-i\omega t} =$

$= \mathrm{Re}\left[A e^{i\omega t}\right]$

$a, \phi = \text{const.} \in \mathbb{R}$; $b, c, A = \text{const} \in \mathbb{C}$

(b) $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} < 0 \Rightarrow$ EQ. <u>INSTABLE</u>

$\Omega^2 \equiv -\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} \Rightarrow \ddot{\eta} = \Omega^2\eta$

SOLUTION: $\eta(t) = a e^{\Omega t} + b e^{-\Omega t}$

$t \to \infty$: $\eta(t)$ s'éloigne exponentiellement de l'équilibre $\eta = 0$.

(c) $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} = 0 \Rightarrow$ EQ. <u>INDIFFÉRENT</u>

$\ddot{\eta} = 0 \Rightarrow$ TOUT DÉPEND des CONDITIONS INITIALES: $\eta = \eta_0 + v_0 t$

② SYSTÈMES À n DEGRÉS de LIBERTÉ

La généralisation du traitement précédent est simple dans le principe, mais met en jeu des techniques de calcul matriciel.

On s'intéresse à des systèmes possédant UNE OU PLUSIEURS POSITIONS D'ÉQUILIBRE :

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i=q_{i0}} = 0 \qquad \forall i=1,\dots,n$$

$\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$\underline{q}_0 = (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0})$

Posons que V passe par un extremum en $q_i = q_{i0}$ et introduisons les PETITS DÉPLACEMENTS $\eta_i = q_i - q_{i0}$; $q_i = q_{i0} + \eta_i$

EN. POTENTIELLE : $V = V(\underline{q}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\,\eta_i\eta_j + O(\eta^3)$ [Développement de Taylor au 2ᵉ ordre.]

$q_i = q_{i0}$; $\eta_i = 0\ \forall i$

$\to$ const. $\to 0$ [car én. pot. définie à une const. additive près]

MATRICE $V_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\underline{q}_0} \in \mathbb{R}$; $V_{ji} = V_{ij}$: SYMÉTRIQUE (c'est clair à partir de sa définition)

EN. CINÉTIQUE :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\,\dot q_i \dot q_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\,\dot\eta_i\dot\eta_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j} T_{ij}\,\dot\eta_i\dot\eta_j$$

$T = T_0 + T_1 + T_2 = T_2$ si les équations de transformation $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ne contiennent pas le temps.

$m_{ij} = m_{ij}(q_1, \dots, q_n)$

à l'ordre le plus bas :

$m_{ij} = m_{ij}(q_{10}, \dots, q_{n0}) = T_{ij} = \text{const}$

MATRICE $T_{ij} \in \mathbb{R}$; $T_{ji} = T_{ij}$: SYMÉTRIQUE (car chaque terme dans la somme qui donne T n'est pas affecté par un échange $i \leftrightarrow j$)

LAGRANGIEN : $L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(T_{ij}\,\dot\eta_i\dot\eta_j - V_{ij}\,\eta_i\eta_j\right)$

On voit ici, à nouveau, que les η_i prennent le rôle de coordonnées généralisées.

EQ. LAGRANGE : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0$

en utilisant la propriété de symétrie des matrices T_{ij}, V_{ij}

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\eta_i} = \sum_j T_{ij}\,\dot\eta_j \qquad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = -\sum_j V_{ij}\,\eta_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_j\left(T_{ij}\,\ddot\eta_j + V_{ij}\,\eta_j\right) = 0} \qquad i = 1,\dots,n$$

Équations à résoudre

Dans la plupart des cas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i T_i \dot{\eta}_i^2$$ ne contient pas de termes mixtes

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \sum_i \left(T_i \dot{\eta}_i^2 - \sum_j V_{ij} \eta_i \eta_j \right)$$

$$\Rightarrow \quad T_i \ddot{\eta}_i + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0 \qquad ; \; i = 1, \dots, n \qquad \text{EQ. de LAGRANGE}$$

- REMARQUES:

MATRICE $V \to V_{ij}$ SYMÉTRIQUE, RÉELLE et SEMI-DÉFINIE POSITIVE:

$$\forall \underline{\eta} \in \mathbb{R}^n : \underline{\eta}^T V \underline{\eta} = \sum_{j,k} V_{jk} \eta_j \eta_k \geq 0$$

MATRICE $T \to T_{ij}$ SYMÉTRIQUE, RÉELLE et DÉFINIE POSITIVE:

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} : \sum_{ij} T_{ij} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j > 0$$

3 MÉTHODE de RÉSOLUTION

EQ. LAGRANGE (pour les petits déplacements η_j) : $\sum_j \left(T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j \right) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$

$$\Updownarrow$$

en FORME MATRICIELLE: $\boxed{T \ddot{\underline{\eta}} + V \underline{\eta} = \underline{0}}$

$$\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

On a, donc, n équations différentielles du second ordre linéaires à coefficients constants homogènes.

La méthode de résolution consiste à chercher des solutions dans une forme particulière qui permet d'écrire un système de n équations linéaires du second ordre DÉCOUPLÉES, parfaitement équivalent au système de départ.

On cherche : $\boxed{\underline{\eta} = \underline{a}\, e^{i\omega t}}$ $\to$ SOLUTION: $\mathrm{Re}[\underline{\eta}]$ pour être physique

$\omega \in \mathbb{R}$; $\underline{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ CONSTANTES

$T\ddot{\underline{\eta}} + V\underline{\eta} = 0$

$\underline{\eta} = \underline{a}\, e^{i\omega t}$ ⟹ en insérant dans l'équation on obtient:

$$(-\omega^2 T + V)\,\underline{a}\, e^{i\omega t} = \underline{0} \iff \boxed{(V - \omega^2 T)\,\underline{a} = \underline{0}}$$

↑ ↑
MATRICES

La détermination des pulsation (propres) ω se ramène à une opération qui ressemble au calcul des valeurs propres de matrices.

$\omega^2 = \lambda$: VALEUR PROPRE ; $\underline{a}$: VECTEUR PROPRE ASSOCIÉ, $\underline{a} \neq \underline{0}$

PARTICULARITÉ du PROBLÈME : λ sont les VALEURS PROPRES de V PAR RAPPORT à la matrice T [Dans le cas usuel : I à la place de T]
↑
Matrice identité

Il est possible de montrer que $\lambda \geq 0$ toujours. Cela est important, autrement ω ne pourrait pas être réel (et la solution s'éloignerait de la position d'équilibre).

EQ. CARACTÉRISTIQUE : $\boxed{\det(V - \lambda T) = 0}$ → DÉTERMINATION VALEURS PROPRES $\lambda = \omega^2$

Un résultat important de l'algèbre linéaire permet de DIAGONALISER SIMULTANÉMENT V et T:

• THÉORÈME :

T: MATRICE SYMÉTRIQUE, RÉELLE, DÉFINIE POSITIVE
V: " " " SEMI-DÉFINIE POSITIVE ⟹

⟹ ∃ MATRICE INVERSIBLE C :

$$\boxed{\begin{array}{l} C^T T C = I \\ C^T V C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Lambda \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ \text{solutions de : } \det(V - \lambda T) = 0 \end{array}}$$

• Dans notre cas:

on peut écrire: $\lambda_j = \omega_j^2$; $\omega_j \geq 0$

Si on effectue un changement de base avec la matrice C ⟹
⟹ on trouve les ÉQUATIONS des MODES NORMAUX:

$$T\ddot{\underline{\eta}} + V\underline{\eta} = \underline{0} \Rightarrow C^T T \ddot{\underline{\eta}} + C^T V \underline{\eta} = \underline{0} \Rightarrow \underbrace{C^T T C}_{I} C^{-1}\ddot{\underline{\eta}} + \underbrace{C^T V C}_{\Lambda} C^{-1}\underline{\eta} = \underline{0} \Rightarrow$$

$CC^{-1} = I$

$$\Rightarrow C^{-1}\ddot{\underline{\eta}} + \Lambda C^{-1}\underline{\eta} = \underline{0}$$;

C : CHANGEM. BASE
C^{-1} : " COORD. : $\underline{Q} = C^{-1}\underline{\eta}$ ⟹ $\boxed{\ddot{\underline{Q}} + \Lambda \underline{Q} = \underline{0}}$

$\Rightarrow$ On a montré que DANS la BASE où les MATRICES T et V sont TOUTES DEUX DIAGONALES, les ÉQ. du MOUVEMENT pour les PETITS DÉPLACEMENT correspondent aux suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{\underline{Q}}(t) + \Lambda\, \underline{Q}(t) = \underline{0} \quad ; \text{ avec } \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ \ddot{Q}_k(t) + \omega_k^2 Q_k(t) = 0 \qquad \forall k \\ \lambda_k = \omega_k^2 \end{array}}$$

n OSCILLATEURS HARMONIQUES DÉCOUPLÉS [Dynamique dans la direction d'un vecteur propre fixé]

Q_k : COORDONNÉES NORMALES (ou PRINCIPALES) [$\underline{Q}$: vecteur dans la base des vecteurs propres]

si $\lambda_k = 0 \Rightarrow \ddot{Q}_k = 0$, qui ne correspond pas à un oscillateur harmonique.

RÉSUMÉ :

Pour décrire les PETITS DÉPLACEMENTS :

(i) $\det(V - \lambda T) = 0 \Rightarrow \lambda_k$: VALEURS PROPRES, avec $\lambda_k = \omega_k^2$ et ω_k : PULSATION PROPRE

(ii) $(V - \lambda_k T)\, \underline{e}_k = \underline{0} \Rightarrow \underline{e}_k$: VECTEURS PROPRES

(iii) SOLUTION : SUPERPOSITION de SOLUTIONS OSCILLANTES :

$$\underline{\eta} = \sum_k A_k \underline{e}_k\, e^{i\omega_k t}$$ [PARTIE RÉELLE] ; A_k = constantes de la combinaison linéaire.

(iv) DANS la BASE où T, V DIAGONALE : $\ddot{Q}_k(t) + \omega_k^2 Q_k(t) = 0$

$$\underline{\eta} = C\,\underline{Q}$$

$$\text{BASE de } \underline{\eta} \underset{C^{-1}}{\overset{C}{\rightleftarrows}} \text{BASE de } \underline{Q}$$

$$\text{COORD. } \underline{\eta} \underset{C}{\overset{C^{-1}}{\rightleftarrows}} \text{COORD. } \underline{Q}$$

C : MATRICE qui a pour COLONNES les COMPOSANTES des VECTEURS PROPRES $\underline{e}_k$

• REMARQUES :

- La détermination des fréquences propres se ramène toujours au calcul des valeurs propres d'une matrice. Celle-ci étant symétrique, les valeurs propres sont toujours réelles, positives ou négatives.

- Les valeurs propres positives correspondent à des modes oscillants (équilibre stable).
  Les modes propres sont des modes collectifs d'oscillation à une seule fréquence, pouvant être excités indépendamment les uns des autres.
  Dans le cas où toutes les valeurs propres sont positives, on peut considérer le mouvement complet d'un système comme étant ~~[illegible]~~ obtenu en excitant les divers oscillateurs harmoniques avec des amplitudes et des phases différentes.

- Les valeurs propres négatives correspondent à des solutions s'écartant exponentiellement de la position d'équilibre. Un système isolé devant conserver son énergie, cela signifie que notre traitement échoue pour les grandes amplitudes.

- Enfin, les valeurs propres nulles forment ce qu'on appelle des modes mous (en élasticité ils sont appelés modes rigides). Ils correspondent à $\ddot{Q}_k = 0$ et donc à une vitesse de translation constante dans la direction de la coordonnée principale associée. Puisque cette vitesse est constante, cela signifie que l'impulsion (moment linéaire) associée est un invariant.
  À l'inverse, un système invariant par translation dans une direction donnée aura un mode propre mou correspondant.