UNIVERSITE DE LILLE
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Examen de Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Mardi 11 décembre 2018

Durée : 2 heures. Documents autorisés

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1

Une masse m liée à un point fixe O par un ressort élastique linéaire, de raideur k et longueur au repos $\ell_0 = 0$, est contrainte de se déplacer uniquement dans une direction (axe x). On souhaite étudier la dynamique de ce système (oscillateur harmonique unidimensionnel) à travers le formalisme de Hamilton.

Equations de Hamilton

Q1) Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le lagrangien du système. (1,5 points)

Q2) En effectuant une transformation de Legendre, déterminer le hamiltonien du système. En posant $\omega^2 = k/m$, vérifier que ce dernier peut s'exprimer comme suit : (1,5 points)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 x^2\right).$$

Q3) Déterminer les dimensions physiques des quantités ω, $p^2/(2m)$, $m^2\omega^2x^2/(2m)$ et préciser leur signification physique. (1,5 points)

Q4) A partir de l'expression du hamiltonien, déterminer les équations de Hamilton et vérifier qu'elles sont données par (1 point) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -m\omega^2 x. \end{aligned}$$

Q5) Déduire des équations de Hamilton l'équation correspondant au principe fondamental de la dynamique pour ce système. (1 point)

Q6) Préciser si H est l'énergie mécanique et pourquoi. Est H conservée ? (1 point)

Equilibre, stabilité et portrait de phase

Q7) Déterminer toutes les positions d'équilibre du système. (1 point)

Q8) Effectuer l'analyse qualitative du mouvement et tracer le portrait de phase du système. (2 points)

Q9) A partir de la conservation du hamiltonien montrer que, pour des valeurs positives de l'énergie mécanique, les trajectoires dans l'espace des phases (x, p) sont des ellipses d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$ et préciser les expressions des demi-axes a et b. (1,5 points)

Q10) Calculer l'aire $S = \pi ab$ de l'ellipse et donner son expression en fonction de l'énergie mécanique E. Sauriez vous montrer à partir de ce résultat que l'action est conservée ? (1,5 points)

Transformations canoniques et crochets de Poisson

Q11) On considère maintenant la transformation de coordonnées $(x, p) \to (\theta, I)$ (où $I \equiv S/(2\pi) = E/\omega$) :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin\theta, \\ p &= \sqrt{2Im\omega} \cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour vérifier si elle est canonique il suffit de montrer que les crochets de Poisson sont des invariants. Dans ce cas il est avantageux de procéder "en arrière". En calculant, donc, $[x, p]_{(\theta, I)}$ déterminer si la transformation est canonique ou pas. (1 point)

Q12) Déterminer le nouveau hamiltonien K, fonction de θ et I. (1 point)

Q13) Dire si une des variables est cyclique et, éventuellement, quelle est la quantité conservée associée. (1 point)

Q14) Déterminer les équations de Hamilton pour les variables θ et I. (1 point)

Q15) Résoudre les équations trouvées à la question précédente. (1 point)

Q16) A partir de la solution dans les nouvelles variables, $\theta = \theta(t)$ et $I = I(t)$, déterminer la solution dans les variables de départ $x = x(t)$ et $p = p(t)$.
Sauriez vous montrer que cette solution est cohérente avec des trajectoires de phase elliptiques dans le plan (x, p) (voir Q9)) ? (1,5 points)