· EX. 1

Q1)
$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \\ z = \dfrac{r}{\tan\alpha} \end{cases} \qquad \underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ \dot{z} = \dfrac{\dot{r}}{\tan\alpha} \end{cases}$$

$$v^2 \equiv |\underline{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2\cos^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta \cancel{- 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta} +$$
$$+ \dot{r}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta \cancel{+ 2r\dot{r}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta} +$$
$$+ \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha} =$$
$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha}$$

Q2)

$$L = T - V$$

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha}\right) = \frac{m}{2}\left[r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{r}^2\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)}_{(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1})/\sin^2\alpha}\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$V = mgz = mg\frac{r}{\tan\alpha} \quad ; \quad f_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha}\right) - \frac{mgr}{\tan\alpha}$$ LAGRANGIEN

Q3)

$L = L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta})$ 2 DEGRÉS de LIBERTÉ : r, ϑ

CONTRAINTE : MOUVEMENT sur la SURFACE du CÔNE $\Rightarrow z = \dfrac{r}{\tan\alpha}$

Q4)

$$\begin{cases} p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dfrac{m\dot{r}}{\sin^2\alpha} \\ p_\vartheta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} \end{cases}$$

MOMENTS CANONIQUES CONJUGUÉS

Q5)

$$H = \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right]_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{p})}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\sin^2\alpha}{m}\, p_r \\ \dot{\vartheta} = \dfrac{p_\vartheta}{m r^2} \end{cases}$$

$$H = \left[p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} - L\right]_{\dot{r} = \dot{r}(p_r),\, \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(p_\vartheta)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{m} p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{m r^2} - \frac{m}{2}\left(\frac{\cancel{r^2}\, p_\vartheta^2}{m^2 r^{\cancel{4}2}} + \frac{1}{\cancel{\sin^2\alpha}} \frac{\sin^{\cancel{4}2}\alpha}{m^2} p_r^2\right) + \frac{m g r}{\tan\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{2m} p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{2 m r^2} + \frac{m g r}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow H(r, \vartheta, p_r, p_\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{m} p_r^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\vartheta^2}{m r^2} + \frac{m g r}{\tan\alpha}$$ HAMILTONIEN

Q6)

H INDEP. t EXPLICITEMENT $\Rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = \text{const}$

ϑ ne figure pas dans H $\Rightarrow$ ϑ est CYCLIQUE : $\dfrac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0$

$\Rightarrow p_\vartheta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \text{const}$

H : ENERGIE MÉCANIQUE , $H = T + V$

p_ϑ : MOMENT ANGULAIRE (rotation d'un angle ϑ)

Q7)

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{\sin^2\alpha}{m} p_r \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{p_\vartheta^2}{m r^3} - \dfrac{m g}{\tan\alpha} \\ \dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \dfrac{p_\vartheta}{m r^2} \\ \dot{p}_\vartheta = -\dfrac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases}$$

EQUATIONS de HAMILTON

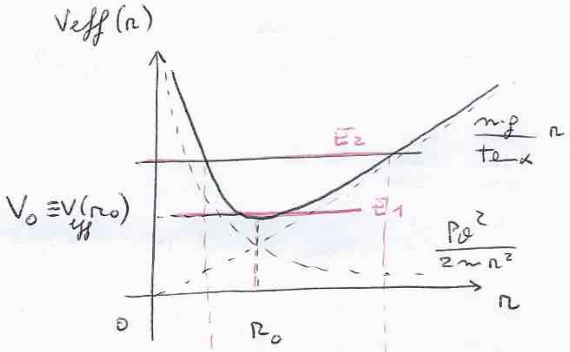
en accord avec le résultat précédent

Q8)

$$H = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{m}p_r^2 + V_{eff}(r)$$

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m r^2} + \frac{m g r}{\tan\alpha} \qquad \text{avec } p_\theta = cst$$

Donc, on peut maintenant penser au système en termes d'une particule en mouvement dans le potentiel $V_{eff}(r)$.



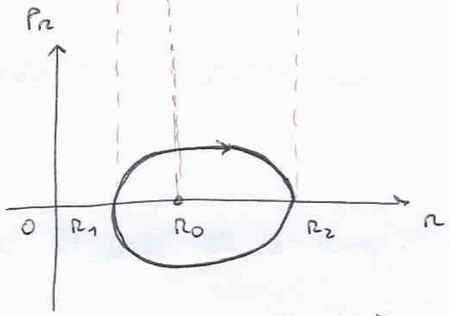
$$V_{eff}(r) = \frac{p_\theta^2}{2 m r^2} + \frac{m g r}{\tan\alpha}$$

$V_{eff}(r) > 0 \quad \forall r$

$r \to 0 : \quad V_{eff}(r) \simeq \frac{p_\theta^2}{2 m r^2}$

$r \to \infty : \quad V_{eff}(r) \simeq \frac{m g}{\tan\alpha} r$

Q9)



$E = H = cst$ qui dépend des conditions initiales

$r_0 : \frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0 \Rightarrow -\frac{p_\theta^2 \cancel{2}}{\cancel{2} m r^3} + \frac{m g}{\tan\alpha} = 0$

$$\Rightarrow r_0 = \left[\frac{\tan\alpha}{m^2 g} p_\theta^2\right]^{1/3}$$

DIMENSIONS PHYSIQUES : $[r_0] = \left[\left(\frac{p_\theta^2}{m^2 g}\right)^{1/3}\right] = \left[\left(\frac{M^2 L^4 T^{-2}}{M^2 L T^{-2}}\right)^{1/3}\right] = [L]$

$E \geq V_0 \equiv V_{eff}(r_0) = \min_r V_{eff}(r)$ AUTREMENT PAS PHYSIQUE

$E = E_1 \Rightarrow r = r_0 \; ; \; p_\theta = cst \Rightarrow \dot\theta = \frac{p_\theta}{m r_0^2} = cst$

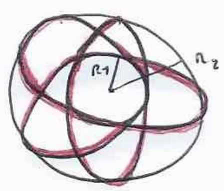
$E_1 = V_0$

EQ. HAMILTON

MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

$E = E_2 > V_0 \Rightarrow$ 2 POINTS D'INVERSION : r_1, r_2

MOUVEMENT LIMITÉ avec $r_1 \leq r \leq r_2$



par exemple

Q10)

$$[p_\vartheta , H] = 0$$ CROCHETS de POISSON

Car on sait que $p_\vartheta = \text{const}$ et

$$0 = \dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -[H, p_\vartheta] = [p_\vartheta, H]$$

Q11)

$n = 2$
$q_1 = r$
$q_2 = \vartheta$
$p_1 = p_r$
$p_2 = p_\vartheta$

$$[p_\vartheta, H] = \sum_{j=1}^{2} \left(\cancel{\underbrace{\frac{\partial p_\vartheta}{\partial q_j}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_j}} - \underbrace{\frac{\partial p_\vartheta}{\partial p_j}}_{\neq 0 \text{ si } j=2:\ p_2 = p_\vartheta} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial p_\vartheta}{\partial p_\vartheta}}_{=1} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \vartheta}}_{=0} = 0$$ car H est INDÉPENDANT de ϑ

• REMARQUE :
SYSTÈME à $n=2$ DEGRÉS de LIBERTÉ
$n=2$ CONSTANTES du MOUVEMENT : H, p_ϑ ⟹ SYSTÈME INTÉGRABLE
AVEC $[p_\vartheta, H] = 0$

Cependant, si le cône est incliné par rapport à la gravité, le système est chaotique.
[cf. M. Argentina, P. Coullet, J.-M. Gilli, M. Monticelli, G. Rousseaux, "CHAOS in ROBERT HOOKE'S INVERTED CONE", PROC. R. SOC. A 463, 1259-1269 (2007)]