UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

# Examen de Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Mardi 12 décembre 2017

**Durée : 2 heures. Documents autorisés**

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

## Exercice 1 : Mouvement d'une particule dans un cône

Nous nous intéressons à un dispositif expérimental qui a été conçu par Robert Hooke (1635-1703) comme un modèle mécanique utile à étudier le mouvement d'une planète autour d'un centre de force comme par exemple le Soleil[1].

Le système est constitué par un cône de demi-angle $\alpha$ ayant son axe le long de la direction verticale et son sommet en bas (Fig. 1). Une particule de masse $m$ glisse sans frottement à l'intérieur du cône sous l'influence de la pesanteur. Le but de cet exercice est d'étudier le mouvement de la masse $m$ à l'aide du formalisme hamiltonien.

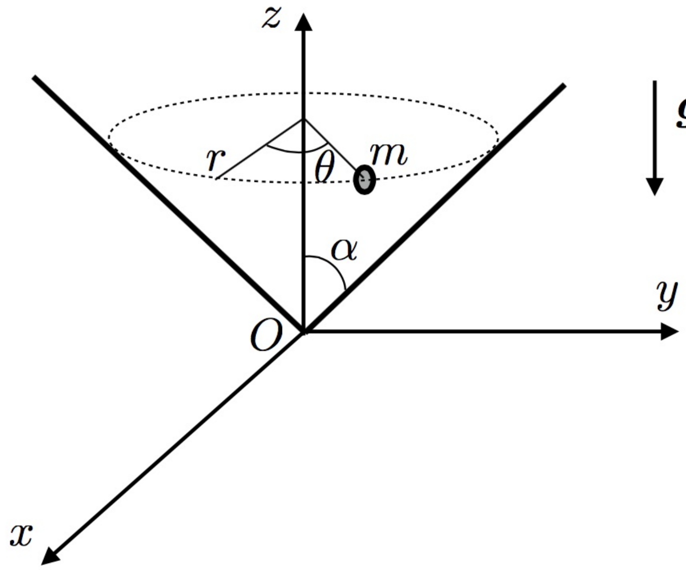


FIGURE 1 – Particule de masse $m$ glissant sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle $\alpha$, axe vertical et sommet en bas.

1. M. Argentina et al., *Chaos in Robert Hooke's inverted cone*, Proc. R. Soc. A **463**, 1259–1269 (2007)

Q1) Exprimer les coordonnées $x$, $y$, $z$ de la particule en fonction de $r$, $\theta$ et $\alpha$ (voir Fig. 1). Calculer ensuite la vitesse $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, ainsi que son module au carré $v^2 \equiv |\boldsymbol{v}|^2$. (2,5 points)

Q2) Vérifier que le Lagrangien associé au mouvement de la particule est

$$L = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\sin^2\alpha}\right) - \frac{mgr}{\tan\alpha}.$$

(1,5 points)

Q3) Combien de degrés de liberté possède le système constitué par la particule ? (1 point)

Q4) Montrer que les moments canoniques conjugués correspondant aux coordonnées $r$ et $\theta$ sont, respectivement,

$$p_r = \frac{m\dot{r}}{\sin^2\alpha} \quad \text{et} \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}.$$

(2 points)

Q5) En effectuant une transformation de Legendre, montrer que le hamiltonien de ce système est donnée par

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{m}p_r^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{mgr}{\tan\alpha}.$$

(2 points)

Q6) Expliquer pourquoi le hamiltonien $H$ et le moment canonique $p_\theta$ sont des constantes du mouvement. (2 points)

Q7) Déterminer les équations de Hamilton pour ce système. (2 points)

Q8) Compte tenu du fait que $p_\theta = \text{const}$, nous pouvons exprimer le hamiltonien dans la forme

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{m}p_r^2 + V_{eff}(r)$$

où

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{mgr}{\tan\alpha}.$$

En d'autres termes, nous pouvons maintenant penser au système comme s'il était constitué par une particule en mouvement dans un potentiel $V_{eff}(r)$.
Tracer le graphique de $V_{eff}$ en fonction de $r$. (2 points)

Q9) Effectuer une analyse qualitative du mouvement en décrivant brièvement les types de mouvement attendus et tracer le portrait de phase du système. (2 points)
Quelle est la valeur $r_0$ de la coordonnée $r$ correspondant au minimum de $V_{eff}$ ? Après avoir calculé $r_0$ vérifier ses dimensions physiques. (1 point)

Q10) En utilisant les propriétés des crochets de Poisson, montrer que $[p_\theta, H] = 0$. (1 point)

Q11) Vérifier le résultat précédent en calculant explicitement $[p_\theta, H]$. (1 point)