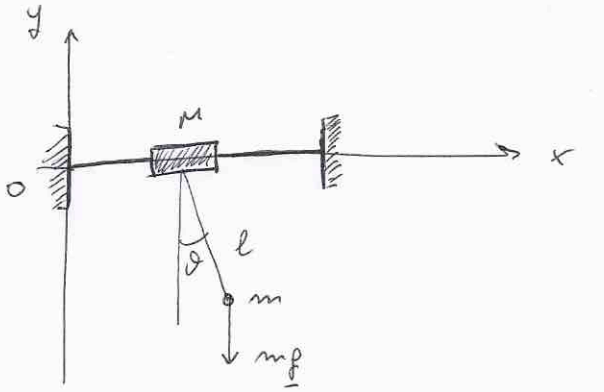
- EX. 1 :



M: PAS de FROTTEMENT le long de x

Q1) SYSTÈME CONSERVATIF ; FORCE APPLIQUÉE : PESANTEUR

Q2) $\boxed{T = T_M + T_m}$

$$L = \underbrace{T_M}_{L_M} + \underbrace{T_m + V}_{L_m}$$

$$\boxed{T_M = \frac{M\dot{x}^2}{2}} \quad ; \quad L_M = T_M$$

$$T_m = \frac{m v_m^2}{2}$$

$$m : \underline{r} = (x + l\sin\vartheta, -l\cos\vartheta)$$

$$\underline{v}_m = (\dot{x} + l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, l\dot{\vartheta}\sin\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta\right) =$$

$$= \boxed{\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) = T_m}$$

Q3) $$\underline{f} = m\underline{g} \quad ; \quad f_y = -mg \quad \Rightarrow V = mgy = -mgl\cos\vartheta$$

$$L_m = T_m - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta$$

Q4)

$$\Rightarrow \boxed{L = T_M + T_m + V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta}$$

LAGRANGIEN

con $\left\{\begin{array}{l} L = L_M + L_m \\ L_M = T_M \\ L_m = T_m + V \end{array}\right.$

Q5) $L = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta$

(1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

(2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$

(1) $M\ddot{x} + m\ddot{x} + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(2l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) = 0$

$\rightarrow (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\vartheta}\cos\vartheta + ml\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = 0$

(2) $ml^2\ddot{\vartheta} + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(2l\dot{x}\cos\vartheta\right) \underbrace{+ ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + mgl\sin\vartheta}_{-\frac{\partial L}{\partial \vartheta}} = 0$

$ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}\cos\vartheta \cancel{- ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta} + \cancel{ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta} + mgl\sin\vartheta = 0$

$\cancel{ml}^{\cancel{2}}\ddot{\vartheta} + \cancel{ml}\ddot{x}\cos\vartheta + \cancel{mg}\cancel{l}\sin\vartheta = 0$

$\rightarrow l\ddot{\vartheta} + \ddot{x}\cos\vartheta + g\sin\vartheta = 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - ml\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = 0 \\ (2) & l\ddot{\vartheta} + \ddot{x}\cos\vartheta + g\sin\vartheta = 0 \end{array}}$$

EQUATIONS DU LAGRANGE

Q6) x : COORD. CYCLIQUE (IGNORABLE)

Q7) (1) $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{(M+m)\dot{x} + ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta}_{P_x}\Big] = 0$

P_x MOM. LINÉAIRE TOTAL ; $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$

$P_x = \underbrace{M\dot{x}}_{P_{M_x}} + \underbrace{m\left(\dot{x} + l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right)}_{m\frac{d}{dt}\left(x + l\cos\vartheta\right) = m v_{mx} = P_{mx}} = P_{M_x} + P_{mx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P_{M_x} + P_{mx} = \text{cost}}$

MOM. LINÉAIRE TOTAL : INTÉGRALE PRÉMIÈRE (QUANTITÉ DE MOUVEMENT TOTALE.)

$P_x = \text{cost} \Rightarrow$ SYMÉTRIE : INVARIANCE par TRANSLATION.
La dynamique ne dépend pas d'où se trouve le système le long de l'axe x.

Q8)

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - m\ell\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = 0 \\ \ell\ddot{\vartheta} + \ddot{x}\cos\vartheta + g\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

EQUILIBRE : $\ddot{\vartheta} = \dot{\vartheta} = \ddot{x} = \dot{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\vartheta = 0 \quad ; 0 \leq \vartheta < \pi \quad \Rightarrow \vartheta_0 = 0$

Q11 BONUS)

PETITES OSCILLATIONS : $\eta = \vartheta - \vartheta_0 \equiv \vartheta \quad \Rightarrow$

$$\cos\vartheta \simeq 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$$

$$\sin\vartheta \simeq \vartheta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\vartheta}\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) - m\ell\dot{\vartheta}^2\vartheta = 0 \\ \ell\ddot{\vartheta} + \ddot{x}\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) + g\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ À l'ordre le plus bas :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\vartheta} = 0 \\ \ell\ddot{\vartheta} + \ddot{x} + g\vartheta = 0 \end{cases}$$

Q9)

$$\ddot{x} = -\frac{m\ell}{M+m}\ddot{\vartheta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\vartheta}\underbrace{\left(\ell - \frac{m\ell}{M+m}\right)}_{\ell\frac{M}{M+m}} + g\vartheta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\frac{(M+m)}{M}\vartheta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\vartheta$$

OSCILLATEUR HARMONIQUE : $\ddot{\vartheta} = -\omega^2 \vartheta$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{m}{M}}}$$

$$m \ll M \Rightarrow T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

comme pour un pendule ordinaire (support fixe)

$$m \gg M \Rightarrow T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{m}{M}}} < 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

PERIODE PLUS COURTE (OSCILLATIONS PLUS RAPIDES)

Q10)

SOLUTION :

$$\boxed{\vartheta(t) = C\cos(\omega t + \phi)}$$

(SOL. OSCILL. HARM.) ; $C, \phi =$ cst (à déterminer avec les conditions initiales)

$$\ddot{x}(t) = -\frac{m\ell}{M+m}\ddot{\vartheta}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\frac{m\ell\dot{\vartheta}(t)}{M+m} + A$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{m\ell\vartheta(t)}{M+m} + At + B}$$

; $A, B =$ cst (à déterminer avec les conditions initiales)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vartheta(t) = C\cos(\omega t + \phi) \\ x(t) = -\dfrac{Cm\ell}{M+m}\cos(\omega t + \phi) + At + B \end{cases}}$$

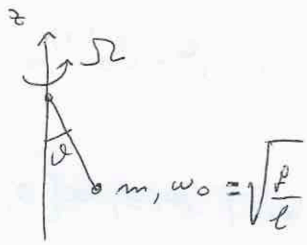
SOLUTION des ÉQ. du MOUVEMENT des PETITES OSCILLATIONS

• EX. 2 :

$$L = T - V = \frac{m}{2} l^2 \dot\vartheta^2 + \frac{m}{2} l^2 \Omega^2 \sin^2\vartheta + mgl\cos\vartheta$$

[ch. TD12]

$$\frac{L}{ml^2} \to L$$



$$\boxed{L = \frac{\dot\vartheta^2}{2} + \frac{\Omega^2}{2}\sin^2\vartheta + \omega_0^2\cos\vartheta = T(\dot\vartheta) - V_{eff}(\vartheta)}$$

LAGRANGIEN

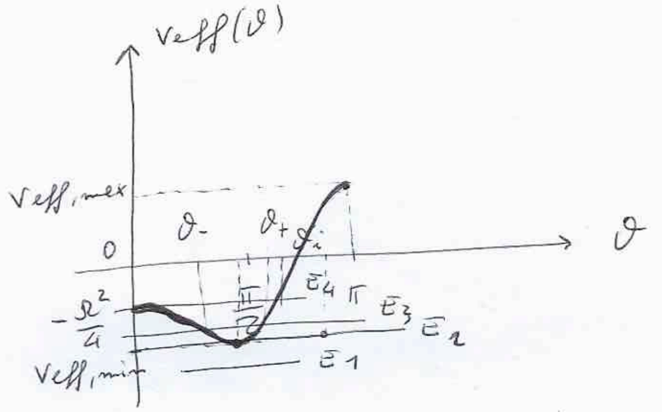
Q1) $$\boxed{V_{eff}(\vartheta) = -\frac{\Omega^2}{2}\sin^2\vartheta - \omega_0^2\cos\vartheta}$$

POTENTIEL EFFICACE

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{2} \Rightarrow V_{eff}(\vartheta) = -\frac{\Omega^2}{2}\sin^2\vartheta - \frac{\Omega^2}{4}\cos\vartheta = -\frac{\Omega^2}{4}\left(2\sin^2\vartheta + \cos\vartheta\right)$$

$\omega_0 < \Omega$ (ROTATION RAPIDE)

$0 \le \vartheta \le \pi$



Q2)

EQUILIBRE :

$$0 = \frac{dV_{eff}}{d\vartheta} = -\frac{\Omega^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \omega_0^2\sin\vartheta = \left(-\Omega^2\cos\vartheta + \omega_0^2\right)\sin\vartheta$$

$\Leftarrow$

Q3) EQUILIBRE et STABILITÉ :

$\vartheta_0^{(1)} = 0$ INSTABLE (MAX)

$\vartheta_0^{(2)} = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\right) \underset{\omega_0 = \frac{\Omega}{2}}{=} \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$ STABLE (MIN)

$\vartheta_0^{(3)} = \pi$ INSTABLE (MAX)

Q4)

(a) $E_1 < V_{eff,min}$

$E = T(\dot\vartheta) + V_{eff}(\vartheta) \geq V_{eff,min}$ car $T(\dot\vartheta) \geq 0$ $\Rightarrow$ NON PHYSIQUE

(b) $E_2 = V_{eff,min}$

$\vartheta = \vartheta_0^{(2)}$ et $\dot\vartheta = 0$ $\Rightarrow$ ROTATION AUTOUR de z avec $\vartheta = \vartheta_0^{(2)} = \text{cost}$

(c) $V_{eff,min} < E_3 < -\frac{\Omega^2}{4}$

2 POINTS D'INVERSION : ϑ_- et ϑ_+

MOUVEMENT LIMITÉ : $\vartheta_- \le \vartheta \le \vartheta_+$

ROTATION AUTOUR de z avec $\vartheta \simeq \vartheta_0^{(2)}$; OSCILLATIONS AUTOUR de $\vartheta_0^{(2)}$

(d) $E_4 = -\frac{\Omega^2}{4}$

(i) $\vartheta = \vartheta_0^{(1)} = 0$ et $\dot{\vartheta} = 0$ $\Rightarrow$ ROTATION AUTOUR de z avec $\vartheta = \vartheta_0^{(1)} = \text{cost}$

(ii) $\vartheta(0) \in [0, \vartheta_i]$
↳ POINT INVERSION

$\vartheta_0^{(1)}$ REJOINT ASYMPTOTIQUEMENT

ROTATION AUTOUR de z et MOUVEMENT de $\vartheta(0)$ è $\vartheta_0^{(1)}$ (qui est rejoint seulement pour $t \to \infty$)

(e) $E_5 = V_{eff,max}$

$\vartheta = \vartheta_0^{(3)} = \pi$ et $\dot{\vartheta} = 0$ $\Rightarrow$ ROTATION AUTOUR de z avec $\vartheta = \vartheta_0^{(3)} = \text{cost.}$