UNIVERSITE DE LILLE
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Devoir surveillé de Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Vendredi 9 novembre 2018

Durée : 2 heures. Documents autorisés

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1

Une masse M est libre de glisser sans frottement sur un rail horizontal. Un pendule de longueur l et masse m est relié à la masse M et suspendu dans le champ de la pensanteur $\boldsymbol{g}$ (Fig. 1). On se propose d'étudier la dynamique du système à l'aide du formalisme lagrangien.

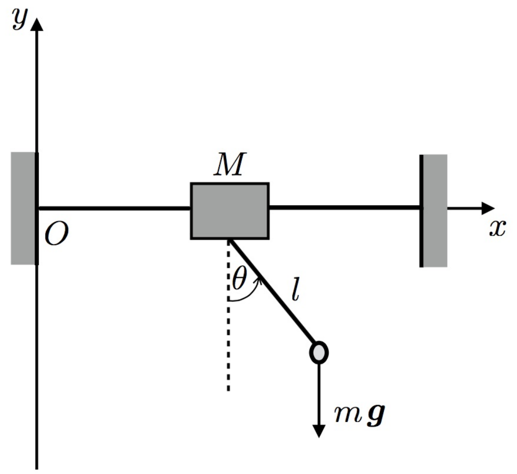

FIGURE 1 – Pendule avec support libre.

Equations de Lagrange et quantités conservées

Q1) Dire si le système est conservatif (ou pas) et pourquoi. (0,5 points)

Q2) En utilisant comme coordonnées généralisées la position x de la masse M le long du rail (axe horizontal) et l'angle θ entre le pendule et l'axe vertical, déterminer l'énergie cinétique du système composé par les deux masses (M et m). (2 points)

Q3) Donner l'expression de l'énergie potentielle du système. (0,5 points)

Q4) Déterminer le lagrangien du système et vérifier qu'il peut s'écrire dans la forme suivante : (1 point)

$$L = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta.$$

Q5) Déterminer les équations de Lagrange du système. Vérifier qu'elles peuvent s'écrire dans la forme suivante : (2 points)

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta &= 0, \qquad (1)\\ l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta &= 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Q6) Ce système présente une coordonnée cyclique, laquelle ? (0,5 points)

Q7) L'existence d'une coordonnée cyclique implique la conservation du moment généralisé correspondant. Déterminer ce moment généralisé, en précisant sa signification physique, et montrer qu'une des équations de Lagrange exprime sa conservation. Sauriez-vous dire quelle propriété de symétrie est associée à cette loi de conservation ? (1,5 points)

Equilibre, stabilité et petites oscillations

Q8) Pour $0 \leq \theta < \pi$, déterminer les positions d'équilibre (correspondant à $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = \ddot{x} = \dot{x} = 0$). (0,5 points)

Q9) Dans la limite de petites oscillations, en faisant les approximations $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ et $\sin\theta \simeq \theta$ on peut montrer que les équations (1), (2) deviennent :

$$\begin{aligned}(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} &= 0, \qquad (3)\\ l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta &= 0. \qquad (4)\end{aligned}$$

En éliminant $\ddot{x}$ déterminer l'équation du mouvement des petites oscillations θ. A quel système simple correspond l'équation obtenue ? Donner l'expression de la pulsation, ainsi que celle de la période, associée au mouvement oscillatoire. (1,5 points)

Q10) Sauriez-vous fournir la solution de l'équation (4) et, ensuite, de l'équation (3) ? (1 point)

Q11 bonus) En utilisant les approximations indiquées dans la Q9), déterminer les équations (3), (4) à partir des équations (1) et (2). (1 point)

Exercice 2

Le régulateur à boules de James Watt (Fig. 2) est un système permettant de réguler la vitesse de rotation d'une machine à vapeur. Il est constitué par une tige verticale relié avec un ou plusieurs bras lié à sa sommité par des charnières. Le système entier est mis en mouvement en faisant tourner la tige avec une vitesse angulaire Ω. Si Ω est grand, l'angle θ des bras avec la verticale atteindra une valeur spécifique qui fera déclencher un interrupteur mécanique afin de limiter l'augmentation ultérieure de la vitesse angulaire.

Dans cet exercice on pourra considérer que le régulateur soit composé par un seul bras de masse négligeable et de longueur l, et par un point matériel de masse m attaché à son extrémité. La charnière assure que le mouvment du bras soit dans un plan vertical qui est lié à la tige, c'est-à-dire qu'il tourne avec elle.

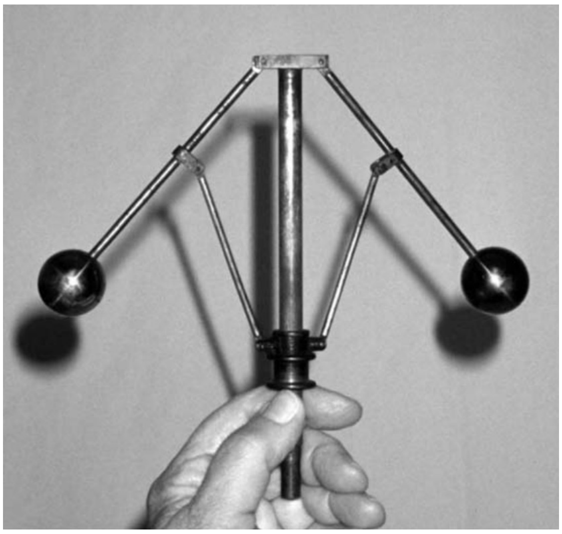

FIGURE 2 – Régulateur à boules de Watt.

Q1) Comme il est montré dans le TDA2, on peut associer au système considéré le lagrangien (en unité de ml^2) $L = \dot{\theta}^2/2 + (\Omega^2/2)\sin^2\theta + \omega_0^2\cos\theta$ où $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ est la pulsation propre associée aux oscillations (d'angle θ) du bras de longueur l. Le problème se prête à une tractation en termes d'un potentiel efficace $V_{eff}(\theta)$ tel que $L = T(\dot{\theta}) - V_{eff}(\theta)$ où $T(\dot{\theta})$ est un terme cinétique dépendant uniquement de $\dot{\theta}$. Identifier le potentiel V_{eff}. (1 point)

Q2) En utilisant l'expression de $V_{eff}(\theta)$, déterminer les positions d'équilibre du bras pour $0 \leq \theta \leq \pi$. (1 point)

Q3) Dans la suite nous considérerons un cas de rotation rapide, $\Omega > \omega_0$, en faisant l'hypothèse que $\omega_0 = \Omega/2$. Pour ce cas, le graphique du potentiel efficace $V_{eff}(\theta)$ est représenté dans la Fig. 3. Sans faire de calcul, déterminer la stabilité des positions d'équilibre. (1 point)

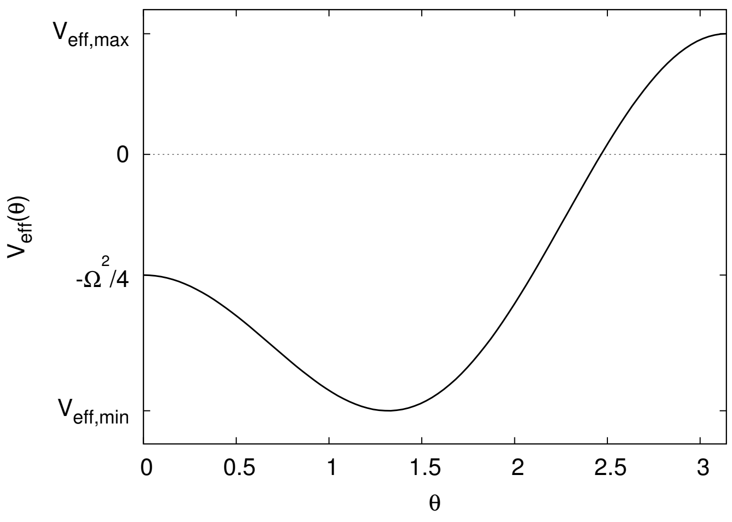

FIGURE 3 – Potentiel efficace.

Analyse qualitative du mouvement

Q4) En se référant au potentiel de la Fig. 3, effectuer l'analyse qualitative du mouvement (méthode graphique), en considérant en particulier les valeurs suivantes de l'énergie mécanique :

(a) $E_1 < \min(V_{eff})$,

(b) $E_2 = \min(V_{eff})$,

(c) $\min(V_{eff}) < E_3 < -\Omega^2/4$,

(d) $E_4 = -\Omega^2/4$,

(e) $E_5 = \max(V_{eff})$.

Pour chaque cas, préciser si le mouvement est physiquement possible, comment on pourrait le réaliser (en fonction du choix de la condition initiale $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$) et en fournir une description qualitative (mouvement limité ou pas, movement de rotation et/ou d'oscillation, ...). (6 points)