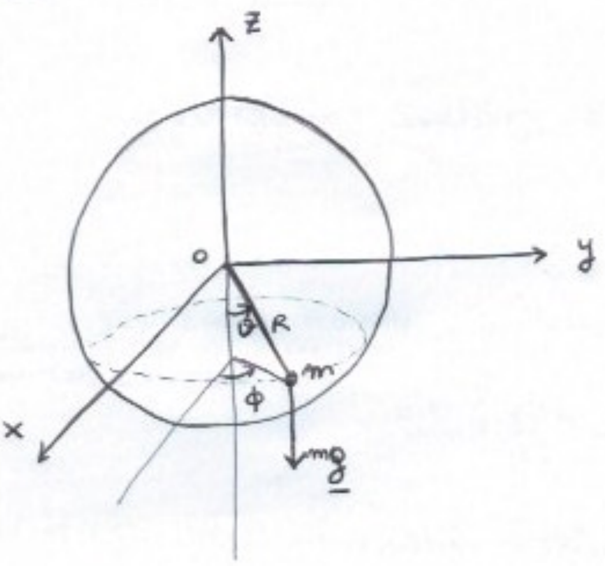
• EX. 1



Q1) FIL INEXTENSIBLE de LONGUEUR R : CONTRAINTE $R = \text{const}$.

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \vartheta \\ q_2 = \phi \end{array}\right\} \text{ 2 DEGRÉS de LIBERTÉ} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{array}$$

Q2) SYSTÈME CONSERVATIF, car FORCE DUE à la PESANTEUR:

$$\underline{f} = m\underline{g} = -mg\hat{z}$$

Q3)
$$\begin{cases} x = R\sin\vartheta\cos\phi \\ y = R\sin\vartheta\sin\phi \\ z = -R\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\phi - \dot{\phi}R\sin\vartheta\sin\phi \\ \dot{y} = R\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\phi + R\dot{\phi}\sin\vartheta\cos\phi \\ \dot{z} = R\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^2 = |\underline{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\sin^2\vartheta\,\dot{\phi}^2$$

$$\underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Egalement: $\underline{v} = (v_r, v_\vartheta, v_\phi) = (0, R\dot{\vartheta}, R\sin\vartheta\,\dot{\phi}) \Rightarrow v^2 = R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\sin^2\vartheta\,\dot{\phi}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\phi}^2\right) \qquad \underline{\text{EN. CINÉTIQUE}}$$

$$\underline{f} = -mg\hat{z} = -\nabla V = -\left(\underset{=0}{\frac{\partial V}{\partial x}}, \underset{=0}{\frac{\partial V}{\partial y}}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad ; \quad -mg = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = mgz = -mgR\cos\vartheta \qquad \underline{\text{EN. POTENTIELLE}}$$

$$L = T - V = \frac{mR^2}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\vartheta\right) + mgR\cos\vartheta$$ LAGRANGIEN

Q4) L est INDÉPENDANT de ϕ $\Rightarrow$ ϕ : CYCLIQUE (IGNORABLE)

En fait : $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

ϕ CYCLIQUE $\Rightarrow$ $P_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = \text{const}$ MOMENT CONJUGUÉ : CONSTANTE du MOUVEMENT (INTÉGRALE PREMIÈRE)

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mR^2\dot\phi\sin^2\vartheta$$

$P_\phi = mR^2\dot\phi\sin^2\vartheta = \ell_\phi$ MOMENT ANGULAIRE DIRECTION ϕ (ROTATIONS AUTOUR de l'axe z)

Q5)

EQ. LAGRANGE pour ϑ : $\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right)}_{mR^2\dot\vartheta}}_{mR^2\ddot\vartheta} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \vartheta}}_{mR^2\dot\phi^2\sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\sin\vartheta} = 0$

$\Rightarrow mR^2\ddot\vartheta - mR^2\dot\phi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + mgR\sin\vartheta = 0$ EQ. LAGRANGE

$\Updownarrow$

$$\ddot\vartheta - \dot\phi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{g}{R}\sin\vartheta = 0$$

Q6) $\dot\phi = \frac{\ell_\phi}{mR^2\sin^2\vartheta} \Rightarrow \ddot\vartheta - \left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + \frac{g}{R}\sin\vartheta$

Q7) EQ. LAGRANGE : $\ddot\vartheta = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial\vartheta}$; V_{eff} : POTENTIEL EFFICACE (unités: énergie/mR^2)

$$\ddot\vartheta = \left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \frac{g}{R}\sin\vartheta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{eff} = -\frac{g}{R}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2\frac{1}{\sin^2\vartheta}$$

Q8) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; E = T + V = \text{const.}$ ↙ ÉNERGIE TOT. MÉCANIQUE

CONSTANTE DU MOUVEMENT (INTÉGRALE PREMIÈRE)

$\updownarrow$

L est INDÉPENDANT du TEMPS EXPLICITEMENT

$$E = T + V = \frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2\vartheta - mgR\cos\vartheta =$$

$$= \frac{mR^2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{\ell_\phi^2}{2mR^2\sin^2\vartheta} - mgR\cos\vartheta$$

$$\dot{\phi} = \frac{\ell_\phi}{mR^2\sin^2\vartheta}$$

ÉNERGIE (unités: énergie/(mR^2))

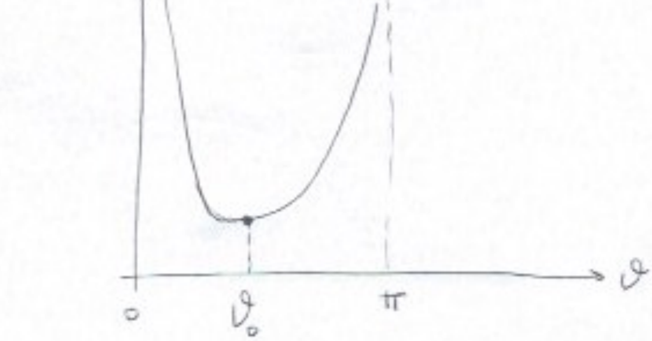
$$\frac{E}{mR^2} = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} \underbrace{- \frac{g}{R}\cos\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\vartheta}}_{V_{eff}(\vartheta)} = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + V_{eff}(\vartheta)$$

Q9) $V_{eff} = -\dfrac{g}{R}\cos\vartheta + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}$

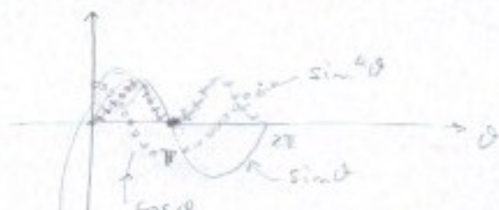
$\vartheta \to 0$: $V_{eff} \simeq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}$

car $\sin\vartheta = 0$ pour $\vartheta = 0, \pi$

$\vartheta \to \pi$: $V_{eff} \simeq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}$



ϑ_0: $V_{eff}(\vartheta) \rightarrow$ minimum



INTERSECTION de $\sin^4\vartheta$ et $\cos\vartheta$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ SOLUTION UNIQUE de:

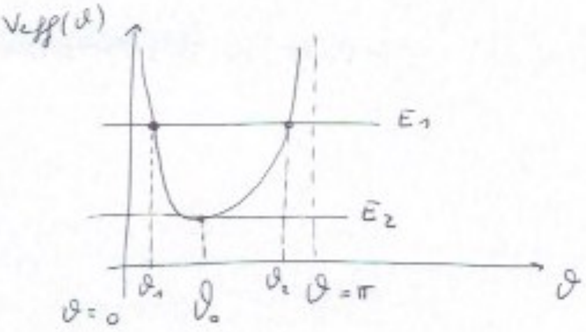
$$0 = \frac{\partial V_{eff}}{\partial\vartheta} = \frac{g}{R}\sin\vartheta - \left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{g}{R}\sin^4\vartheta = \left(\frac{\ell_\phi}{mR^2}\right)^2 \cos\vartheta$$

$\Rightarrow V_{eff}(\vartheta)$ a 1 seul minimum pour $0 \le \vartheta \le \pi$

Q10)



$$\frac{E}{mR^2} \to E$$

(a) $E_1 > \min(V_{eff}) \Rightarrow$ MOUVEMENT LIMITÉ : $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$

$\vartheta_{1,2}$: $V_{eff}(\vartheta) = E$ POINTS d'INVERSION

↳ leurs expressions seront fonctions des paramètres physiques: m, g, R et des conditions initiales (qui déterminent les valeurs des 2 quantités conservées: l_ϕ, E).

La masse m NE PASSE PAS par la région centrale, c'est-à-dire par $\vartheta = 0$; $\vartheta \geq \vartheta_1$ toujours

SCHÉMA TRAJECTOIRES

(b) $E_2 = \min(V_{eff})$

$\vartheta = \vartheta_0$, encore fonctions des paramètres physiques et des conditions initiales (qui déterminent l_ϕ et E).

EQ. LAGRANGE pour ϕ : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \phi}}_{=0} = 0 \Rightarrow$

0 , car ϕ est CYCLIQUE ↳ voir Q4)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) = 0$$

voir Q4)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mR^2 \sin^2\vartheta\, \dot\phi = l_\phi \underset{\vartheta=\vartheta_0}{\Rightarrow} 0 = \frac{d}{dt}\left(mR^2 \sin^2\vartheta_0\, \dot\phi\right) = mR^2 \sin^2\vartheta_0\, \ddot\phi \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ddot\phi = 0 \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega_R t$ avec $\omega_R = \dot\phi = \text{const}$

MOUVEMENT de ROTATION UNIFORME autour de l'axe z, avec $\vartheta = \vartheta_0$ et, donc une hauteur $z = -R\cos\vartheta_0$ fixée.

(C) $E_3 < \min(V_{eff})$

$$E = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} + V_{eff}(\vartheta) \Rightarrow \dot{\vartheta}^2 = 2\left(E - V_{eff}\right);\ E < V_{eff} \Rightarrow \text{PAS PHYSIQUE}$$

Q11)

$$\ddot{\vartheta} = \underbrace{\left(\frac{l_\phi}{mR^2}\right)^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \frac{g}{R}\sin\vartheta}_{-\frac{\partial V_{eff}}{\partial \vartheta}}$$

$\vartheta = \vartheta_0$: EQUILIBRE car $\vartheta_0 : \frac{\partial V_{eff}}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$

(ϑ_0 : MIN. de $V_{eff}(\vartheta)$)

$$\Rightarrow \left(\frac{l_\phi}{mR^2}\right)^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} = \frac{g}{R}\sin\vartheta$$

EQUILIBRE entre la PESANTEUR et les EFFETS de ROTATION (force centrifuge)

Q12)

l'EQUILIBRE $\vartheta = \vartheta_0$ est STABLE car $V_{eff} \to \min$ pour $\vartheta = \vartheta_0$ (voir graphique) $\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0} > 0$

Q13)

$$L_{eff} = \frac{\dot{\vartheta}^2}{2} - V_{eff}(\vartheta)$$

on peut imaginer que l'équation $\ddot{\vartheta} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial \vartheta}$ provienne de ce Lagrangien efficace.

$\eta = \vartheta - \vartheta_0$ PETIT DEPLACEMENT

$$L_{eff} \simeq \frac{\dot{\eta}^2}{2} - \Big[\underbrace{V_{eff}(\vartheta_0)}_{\text{const.} \Rightarrow \text{on néglige}} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}\eta^2\Big] = \frac{\dot{\eta}^2}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \vartheta^2}\right|_{\vartheta=\vartheta_0}}_{C = \text{const.}}\eta^2$$

Q14)

EQ. LAGRANGE PETITES OSCILLATIONS :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot\eta}\right)}_{\ddot\eta} - \underbrace{\frac{\partial L_{eff}}{\partial \eta}}_{-c\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot\eta = -c\eta$$

$\dot\eta$

$$c > 0 \; ; \; c \equiv \omega^2 = \left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \vartheta^2}\right|_{\vartheta = \vartheta_0}$$

$\ddot\eta = -\omega^2 \eta$ OSCILLATEUR HARMONIQUE

$\omega = \sqrt{\left.\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \vartheta^2}\right|_{\vartheta = \vartheta_0}}$ PULSATION des PETITES OSCILLATIONS