UNIVERSITE DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Licence 3 Mécanique - Parcours CMI
Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Devoir surveillé de Mécanique hamiltonienne et lagrangienne

Mardi 7 novembre 2017

Durée : 2 heures. Documents autorisés

- Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.
- Si vous rencontrez une erreur dans l'énoncé, mentionnez le sur votre copie et poursuivez l'exercice.

Exercice 1

Une masse m est reliée au point O par un fil inextensible de longueur R et de masse négigeable dans le champ de la pesanteur et en l'absence de tout type de force de frottement. Ce système, appelé pendule sphérique, est représenté dans la Fig. 1. Les intervalles de variation des angles notés dans la figure sont $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi < 2\pi$. On se propose d'étudier la dynamique du système à l'aide du formalisme lagrangien.

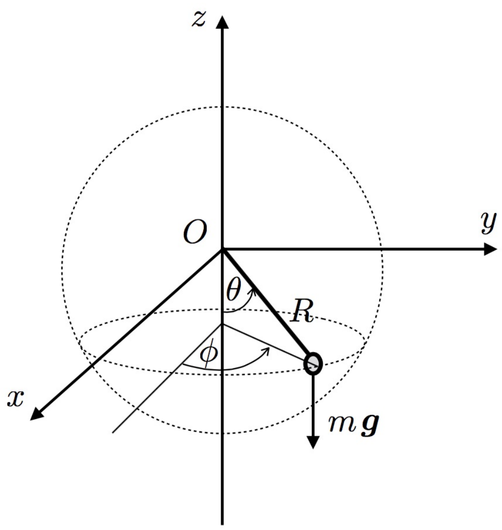

FIGURE 1 – Pendule sphérique.

Equations de Lagrange et quantités conservées

Q1) Quelle est la relation exprimant la contrainte exercée sur le mouvement de la masse m ? Quel est le nombre de degrés de liberté de ce pendule ? Identifier les coordonnées généralisées. (1 point)

Q2) Dire si le système est conservatif (ou pas) et pourquoi. (1 point)

Q3) Donner les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du lagrangien du système. (1,5 points)

Q4) Une des coordonnées généralisées est cyclique (ou ignorable). Identifier cette variable cyclique à partir de l'expression du lagrangien. Déterminr ensuite l'expression de la quantité conservée correspondante et en préciser la signification physique (1,5 points).

Q5) Déterminer l'équation de Lagrange pour l'autre coordonnée généralisée et vérifier qu'elle peut s'écrire comme suit : (1 points)

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta + \frac{g}{R} \sin\theta = 0.$$

Q6) Dans la suite on appelera l_ϕ la quantité conservée déterminée à la question Q4). En utilisant son expression, éliminer $\dot{\phi}$ dans l'équation de Lagrange précédente. (1 point)

Q7) L'équation déterminée à la question Q6) est équivalente à la suivante : $\ddot{\theta} = f_{eff}$, où f_{eff} est une "force" (unités de force/(mR^2)) efficace. Donner l'expression de l'"énergie potentielle" correspondante V_{eff}. (1 point)

Q8) En utilisant la réponse à la question Q2) et/ou l'expression du lagrangien donner l'expression d'une autre quantité conservée et préciser sa signification physique. (1,5 points)

Analyse qualitative du mouvement

Q9) Tracer le graphique de l'énergie potentielle efficace déterminée à la question Q7), c'est à dire de la fonction suivante :

$$V_{eff}(\theta) = -\frac{g}{R} \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{l_\phi}{mR^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2\theta}$$

dans $[0, \pi]$, sachant qu'elle présente un seul minimum dans cet intervalle. (1 point)

Q10) Effectuer l'analyse qualitative du mouvement (méthode graphique) pour les valeurs suivantes de l'énergie mécanique :

(a) $E_1 > \min(V_{eff})$,

(b) $E_2 = \min(V_{eff})$,

(c) $E_3 < \min(V_{eff})$.

Sauriez-vous dire si la masse m peut passer par la région centrale $\theta = 0$ de la sphère tracée dans la Fig. 1 et esquisser sa trajectoire dans le cas (a) ?
En utilisant l'équation de Lagrange pour la coordonnée ϕ et la reponse à la question Q4) préciser le type de mouvement dans le cas (b) et déterminer la solution de l'equation, $\phi = \phi(t)$. (5 points)

Equilibre, stabilité et petites oscillations

Q11) Il existe une valeur $\theta = \theta_0$ qui correspond à une situation d'équilibre. En utilisant l'équation $\ddot{\theta} = f_{eff}$ et l'expression de f_{eff}, donner l'équation permettant de calculer θ_0. Sauriez-vous dire quels sont les effets physiques à l'origine de l'équilibre ? (1 point)

Q12) Dire si l'équilibre trouvé à la question Q11) est stable ou instable (remarque : ici il n'est pas forcement nécessaire de connaître l'expression de θ_0). (1 point)

Q13) On peut imaginer que l'équation $\ddot{\theta} = f_{eff}$ dérive d'un Lagrangien (efficace) $L_{eff} = \dot{\theta}^2/2 - V_{eff}(\theta)$. Quel serait alors l'expression correspondante du Lagrangien (linéarisé) des petits déplacements $\eta = \theta - \theta_0$ autour de la position d'équilibre stable ? (1 point)

Q14) Sans faire des calculs explicites déterminer la forme de l'équation de Lagrange pour les petits déplacements. A quel système simple correspond l'équation obtenue ? Donner l'expression permettant de calculer la pulsation ω associée au mouvement oscillatoire. Le calcul explicite de ω n'est pas demandé. (1,5 points)